

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME TROISIÈME. — ANNÉE 1897.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons;

PAR M. P. APPELL.

1. On sait que la théorie des mouvements tourbillonnaires repose sur un théorème énoncé par Helmholtz. Des démonstrations nouvelles de ce théorème fondamental ont été données par M. Kirchhoff, par Sir W. Thomson et par M. Poincaré.

M. Maurice Lévy a remarqué [1] que des équations qui renferment tous les éléments de la théorie des tourbillons et qui sont analogues, parfois même identiques, à celles de Kirchhoff se trouvent dans un Mémoire de Cauchy, présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1815 et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers* en 1827; ce Mémoire, intitulé : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* est reproduit

---

(1) Voyez un important article de M. Maurice Lévy : *L'Hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance* (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 15 décembre 1890).

Voyez également un excellent Travail historique de M. Brillouin, publié dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* en 1885.

dans le premier Volume (1re série) des *Œuvres complètes de Cauchy*, imprimé chez Gauthier-Villars en 1882, et les équations dont il est question se trouvent dans la deuxième Partie, section première.

En me plaçant surtout au point de vue de l'enseignement, je me propose d'indiquer une interprétation simple et immédiate des équations de Cauchy, donnant les théorèmes fondamentaux de la théorie des tourbillons et conduisant en même temps aux équations de Weber.

2. Imaginons un fluide soumis à des forces dérivant d'un potentiel et dont la densité est fonction de la pression.

Cauchy suppose la densité constante; mais, et c'est là une remarque qui a déjà été faite souvent, son calcul s'applique identiquement au cas plus général où la densité est fonction de la pression.

Pour bien préciser les notations, nous reprendrons ici ce calcul.

Appelons avec Lagrange a, b, c les coordonnées d'une molécule du fluide à l'instant initial $t = 0$, et u_0, v_0, w_0 les projections de la vitesse initiale de cette molécule sur les axes; appelons de même x, y, z les coordonnées de cette molécule à l'instant t et u, v, w les projections de sa vitesse; supposons enfin que les forces agissant sur le fluide dérivent d'un potentiel U.

Les coordonnées x, y, z d'une molécule au temps t sont évidemment des fonctions des coordonnées initiales a, b, c de cette molécule et du temps

$$\begin{aligned} x &= f\,(a, b, c, t), \\ y &= f_1(a, b, c, t), \\ z &= f_2(a, b, c, t); \end{aligned}$$

en outre

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

de sorte que u, v, w sont fonctions des mêmes variables a, b, c, t.

Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned}$$

p désignant la pression et μ la densité. Comme μ est fonction de p par hypothèse, on peut poser

$$V - \int \frac{dp}{\mu} = \psi,$$

et écrire

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Dans ces équations, ψ est regardé comme fonction de x, y, z, t; mais x, y, z sont fonctions de a, b, c, t : on a donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

ou, d'après (1),

$$(2) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

On trouve de même

$$(3) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b}.$$

Éliminant ψ entre ces deux équations à l'aide de la relation

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \psi}{\partial b}\right),$$

on a l'équation

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} \\ &\qquad + \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si, maintenant, on a égard aux formules

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

on reconnaît sans peine que le premier membre de (4) est la dérivée partielle, par rapport à t, de la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}.$$

Cette quantité est donc indépendante du temps t : elle est égale, pendant toute la durée du mouvement, à sa valeur initiale; or, à l'époque $t=0$, on a

$$u=u_0,\qquad v=v_0,\qquad w=w_0,\qquad x=a,\qquad y=b,\qquad z=c,$$

et, par suite, toujours pour $t=0$,

$$\frac{\partial x}{\partial a}=1,\qquad \frac{\partial x}{\partial b}=0,\qquad \frac{\partial y}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial y}{\partial b}=1;$$

la valeur initiale de la quantité considérée est donc

$$\frac{\partial u_0}{\partial b}-\frac{\partial v_0}{\partial a}.$$

On en conclut l'équation

$$(5)\quad \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{\partial u_0}{\partial b}-\frac{\partial v_0}{\partial a}$$

et deux équations analogues obtenues en permutant a, b, c; x, y, z; u, v, w.

Telles sont les trois relations établies par Cauchy et dénotées (15) dans la deuxième Partie de son Mémoire.

3. Voici maintenant l'interprétation qu'on peut en donner. Considérons l'expression différentielle

$$(6)\qquad u\,dx+v\,dy+w\,dz-(u_0\,da+v_0\,db+w_0\,dc),$$

où t est regardé comme une constante, et x, y, z comme des fonctions de a, b, c, t correspondant au mouvement du fluide. Les équations

de Cauchy telles que (5) signifient que, *pour chaque valeur de t, l'expression* (6) *est une différentielle totale exacte.*

En effet, t étant regardé comme une constante, on a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

L'expression (6) s'écrit alors

$$\left(u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} - u_0\right)da + \left(u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b} - v_0\right)db$$
$$+ \left(u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} - w_0\right)dc,$$

expression de la forme

$$A\,da + B\,db + C\,dc;$$

et les relations telles que (5) signifient, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial B}{\partial a} = \frac{\partial A}{\partial b}, \qquad \frac{\partial C}{\partial b} = \frac{\partial B}{\partial c}, \qquad \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{\partial C}{\partial a};$$

la quantité considérée est donc bien une différentielle exacte d'une fonction

$$F(a, b, c, t)$$

et l'on a, pendant tout le mouvement,

$$(7)\qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial a} + v\dfrac{\partial y}{\partial a} + w\dfrac{\partial z}{\partial a} - u_0 = \dfrac{\partial F}{\partial a}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial b} + v\dfrac{\partial y}{\partial b} + w\dfrac{\partial z}{\partial b} - v_0 = \dfrac{\partial F}{\partial b}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial c} + v\dfrac{\partial y}{\partial c} + w\dfrac{\partial z}{\partial c} - w_0 = \dfrac{\partial F}{\partial c}, \end{cases}$$

équations que l'on peut résumer dans l'équation unique

$$(8) \qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = d\mathrm{F}.$$

D'après ces équations (7), les trois dérivées $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}$ s'annulent pour $t = 0$, car u, v, w prennent alors les valeurs u_0, v_0, w_0 et x, y, z les valeurs a, b, c. Donc, pour $t = 0$, F se réduit à une constante indépendante de a, b, c.

4. Dans cette manière d'interpréter le calcul de Cauchy, le théorème de Lagrange sur le potentiel des vitesses devient évident. Ce théorème consiste en ce que *si*

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc$$

est une différentielle totale exacte d'une fonction $\varphi(a, b, c)$,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

est également une différentielle exacte. On a en effet

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc + d\mathrm{F};$$

si donc

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = d\varphi,$$

on a

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d(\varphi + \mathrm{F}),$$

et le théorème de Lagrange est démontré.

5. Le théorème exprimé par l'identité (8) permet d'établir immédiatement le théorème de Helmholtz sous la forme donnée par Sir W. Thomson et adoptée par M. Poincaré dans ses Leçons [1].

Soient C_0 une courbe fermée prise dans le fluide à l'instant $t = 0$, et C la courbe fermée suivant laquelle sont disposées à l'instant t les

[1] Poincaré, *Leçons sur la théorie des tourbillons*; Carré, 1893.

molécules qui étaient primitivement sur C_0. On a, quel que soit t,

$$(9)\qquad \int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int_{C_0} (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc),$$

la première intégrale étant prise le long de C et la deuxième le long de C_0.

En effet, d'après l'identité (8), la différence des deux intégrales (9) est

$$\int_{C_0} d\mathrm{F}(a, b, c, t),$$

c'est-à-dire o, puisque la courbe C_0 est fermée. Réciproquement, en partant de cette propriété, on remonte immédiatement à l'identité (8) et, par suite, aux équations de Cauchy. Car, si la différence

$$\int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) - \int_{C_0} (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc)$$

est nulle quelle que soit la courbe C_0, l'expression

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc),$$

considérée comme fonction des variables indépendantes a, b, c, est une différentielle totale exacte.

6. Au sujet de la fonction F qui s'introduit ainsi dans la théorie du mouvement des fluides, nous ferons les remarques suivantes :

Soit Γ_0 un arc de courbe non fermé, d'extrémités M_0 et M_1, pris dans le fluide à l'instant initial ; à l'instant t, les molécules, primitivement situées sur Γ_0, se trouvent sur une courbe Γ d'extrémités P_0 et P_1. Appelons a_0, b_0, c_0 et a_1, b_1, c_1 les coordonnées des points M_0 et M_1 ; x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 celles des points P_0 et P_1. Évaluons l'intégrale

$$(10)\qquad \int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

prise sur l'arc Γ. Les coordonnées x, y, z d'un point P de cet arc sont

fonctions des coordonnées a, b, c d'un point M de Γ_0 et de t,

$$(11) \qquad \begin{cases} x = f(a, b, c, t), \\ y = f_1(a, b, c, t), \\ z = f_2(a, b, c, t). \end{cases}$$

Quand le point géométrique M décrit l'arc Γ_0 de M_0 en M_1, le point P décrit Γ de P_0 en P_1. En faisant, dans l'intégrale (10), le changement de variables exprimé par les formules (11), où t a une valeur constante, on trouve

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz$$
$$= \int_{(M_0)}^{(M_1)} \left(u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a}\right)da + \left(u\frac{\partial x}{\partial b} + \ldots\right)db + \left(u\frac{\partial x}{dc} + \ldots\right)dc,$$

ou encore, d'après les relations (7),

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int_{(M_0)}^{(M_1)} u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc + dF,$$

et en transposant

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} u\,dx + v\,dy + w\,dz - \int_{(M_0)}^{(M_1)} u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc$$
$$= \int_{(M_0)}^{(M_1)} dF = F(a_1, b_1, c_1, t) - F(a_0, b_0, c_0, t),$$

relation qui pourrait servir à définir géométriquement la fonction F, car les intégrales du premier membre ont des significations simples.

7. Reprenons les équations du mouvement (1) et les relations (7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} = u_0 + \frac{\partial F}{\partial a},$$

$$u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b} = v_0 + \frac{\partial F}{\partial b},$$

$$u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} = w_0 + \frac{\partial F}{\partial c},$$

où x, y, z, u, v, w, F sont des fonctions de a, b, c, t; u_0, v_0, w_0 des fonctions de a, b, c; ψ une fonction de x, y, z, t.

Différentions la première équation du deuxième groupe par rapport à t; il vient

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a} + u\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} + v\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial t} + w\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial t};$$

mais on a

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} = \frac{\partial u}{\partial a}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \ldots;$$

on peut donc écrire

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + u\frac{\partial u}{\partial a} + v\frac{\partial v}{\partial a} + w\frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial t}.$$

La première ligne de cette équation est identique à $\frac{\partial \psi}{\partial a}$, car ψ dépend de a, b, c par l'intermédiaire de x, y, z : on peut donc écrire l'équation

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\psi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{\partial F}{\partial t}\right] = 0.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial}{\partial b}\left[\psi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{\partial F}{\partial t}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left[\psi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{\partial F}{\partial t}\right] = 0.$$

La fonction entre crochets est donc indépendante de a, b, c et ne

dépend plus que de t. Donc

$$\psi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{\partial F}{\partial t} = \chi(t).$$

Comme jusqu'ici la fonction F a simplement été définie par la condition que ses dérivées partielles par rapport à a, b, c aient des valeurs données, elle n'est déterminée qu'à une fonction de t près et l'on peut faire rentrer $\int \chi(t)\,dt$ dans F; on a donc enfin

$$\psi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial F(a, b, c, t)}{\partial t},$$

où la fonction F est maintenant complètement déterminée à une constante additive près. On peut convenir de déterminer cette constante de façon que F s'annule avec t, car, pour $t = 0$, F est indépendant de a, b, c (n° 3). Ces équations reviennent à celles de Weber.

8. En adoptant les notations habituelles, désignons par ξ, η, ζ les projections du vecteur tourbillon

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

où u, v, w sont supposés exprimés en fonctions de x, y, z, t. Appelons en outre ξ_0, η_0, ζ_0 les valeurs de ξ, η, ζ à l'instant $t = 0$,

$$2\xi_0 = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c},$$

$$2\eta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a},$$

$$2\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}.$$

Cauchy établit entre ces quantités les relations suivantes [équations (16), seconde Partie]

$$(12)\qquad \begin{cases} D\xi = \dfrac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial x}{\partial c}\zeta_0, \\[2mm] D\eta = \dfrac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial y}{\partial c}\zeta_0, \\[2mm] D\zeta = \dfrac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial z}{\partial c}\zeta_0, \end{cases}$$

où D désigne le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Ces équations de Cauchy permettent de vérifier facilement cette conséquence du théorème de Helmholtz, que les *lignes de tourbillon se conservent*. C'est ce qu'on voit en employant l'analyse de Kirchhoff dans ses *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 167. On appelle *lignes de tourbillon* les lignes qui, à l'instant t, admettent pour tangentes en chacun de leurs points le vecteur de projections (ξ, η, ζ). Ces lignes ont donc pour équations différentielles

$$(\mathrm{T})\qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

A l'instant initial $t = 0$, les lignes de tourbillon ont pour équations différentielles

$$(\mathrm{T}_0)\qquad \frac{da}{\xi_0} = \frac{db}{\eta_0} = \frac{dc}{\zeta_0}.$$

Il faut montrer que les molécules qui, à l'instant initial, sont sur une ligne de tourbillon T_0, sont à l'instant t sur une ligne de tourbillon T. La molécule qui, à l'instant $t = 0$, a pour coordonnées a, b, c, possède au temps t les coordonnées x, y, z liées à a, b, c par les rela-

tions de la forme

$$x = f(a, b, c, t),$$
$$y = f_1(a, b, c, t),$$
$$z = f_2(a, b, c, t).$$

Quand le point géométrique a, b, c se déplace sur T_0 de da, db, dc, le point x, y, z subit un déplacement géométrique correspondant

$$(13) \qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial a} da + \dfrac{\partial x}{\partial b} db + \dfrac{\partial x}{\partial c} dc, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial a} da + \dfrac{\partial y}{\partial b} db + \dfrac{\partial y}{\partial c} dc, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial a} da + \dfrac{\partial z}{\partial b} db + \dfrac{\partial z}{\partial c} dc. \end{cases}$$

Le point a, b, c se déplaçant sur T_0, da, db, dc vérifient les relations (T_0) et l'on a, en appelant λ un facteur de proportionnalité,

$$da = \lambda\xi_0, \qquad db = \lambda\eta_0, \qquad dc = \lambda\zeta_0.$$

Alors, d'après (12) et (13),

$$dx = \lambda\left(\frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0\right) = \frac{\lambda}{D}\xi,$$
$$dy = \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial y}{\partial c}\zeta_0\right) = \frac{\lambda}{D}\eta,$$
$$dz = \lambda\left(\frac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0\right) = \frac{\lambda}{D}\zeta,$$

relations qui montrent que dx, dy, dz sont proportionnels à ξ, η, ζ, c'est-à-dire que le point x, y, z décrit une ligne de tourbillon T.

Le même fait de la conservation a lieu pour les lignes définies par les équations (T_0) et (T) en prenant pour ξ_0, η_0, ζ_0 des fonctions arbitraires de a, b, c, pourvu que ξ, η, ζ soient donnés par les formules (12) de Cauchy, dans lesquelles D est un facteur quelconque de proportionnalité.

Mémoire sur les équations différentielles;

Par M. DUPORT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Introduction.

Le point de départ de mes recherches sur les équations différentielles et aux dérivées partielles a été de trouver des expressions pour les fonctions y et z d'une variable x satisfaisant à une équation de la forme

$$(1) \qquad f(x, y, z, y', z') = 0,$$

renfermant une fonction arbitraire et ses dérivées.

Ce problème est fort élégamment résolu dans le Mémoire devenu classique de M. Darboux : *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. La solution en est tirée de la Géométrie. Pour traiter la même question analytiquement, j'ai dû tourner la question et substituer par l'introduction d'une nouvelle fonction un système linéaire à l'équation (1). En posant par exemple $z' = u$, l'équation (1) peut être remplacée par le système

$$z' = u,$$

$$y' = \varphi(x, y, z, u),$$

qui est un cas particulier du système différentiel

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du = 0,$$
$$A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz + D'\,du = 0,$$

x, y, z, u étant des fonctions d'une variable et A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ des fonctions arbitraires de x, y, z, u. Ces fonctions x, y, z, u peuvent s'exprimer au moyen d'une variable convenablement choisie, d'une fonction arbitraire de cette variable et de ses dérivées premières et secondes. Cette question a fait l'objet d'un Mémoire que j'ai publié dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. III, n° 3.

J'ai été ainsi conduit à l'étude des systèmes formés de plusieurs équations de Pfaff, quel que soit le nombre des variables indépendantes. Cette question n'a pas encore été traitée à ma connaissance. Le seul Mémoire qui s'en rapproche est celui de M. Darboux, publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. VI, sur les formes réduites de l'équation de Pfaff. Dans la première Partie de ce Mémoire, l'étude de l'équation de Pfaff est faite à l'aide d'une identité remarquable de la manière la plus simple; dans la seconde, M. Darboux considère plusieurs équations de Pfaff et obtient des fonctions des coefficients de ces équations qui sont des invariants pour un changement quelconque de variables.

Je me suis, au contraire, occupé de la recherche des solutions du système formé par plusieurs équations de Pfaff, quel que soit le nombre des variables arbitraires. Selon ce nombre, tantôt les équations obtenues ne possèdent de solutions que dans des cas particuliers, tantôt on a des systèmes de solutions renfermant des éléments arbitraires dépendant d'un nombre plus ou moins grand de variables; mais il y a toujours des liens très étroits entre les systèmes déduits des mêmes équations de Pfaff. J'ai mis ces résultats en lumière dans un second Mémoire publié dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. V, n° 1, où j'ai étudié tous les systèmes de plusieurs équations de Pfaff lorsque le nombre total des variables dépendantes et indépendantes ne dépasse pas cinq.

Dans le Mémoire actuel, je m'occupe de l'étude de deux équations de Pfaff dans le cas où le nombre total des variables est de six, c'est-

à-dire du système

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma a_i\,dx_i = 0\\ \Sigma b_i\,dx_i = 0\end{array}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, 6).$$

Je donne une classification complète de tous les cas qui peuvent se présenter au point de vue de l'intégration des systèmes obtenus, quel que soit le nombre des variables arbitraires. J'y ai fait le plus grand usage du Mémoire précédemment cité de M. Darboux.

Dans le cas où le nombre des variables indépendantes est de deux, on a alors quatre équations renfermant quatre fonctions inconnues. Ce cas est de beaucoup le plus intéressant. Il forme une transition entre les équations différentielles du premier ordre et celles du second ordre. Les solutions dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable. J'ai notamment trouvé deux cas où l'on peut obtenir, à l'aide de l'intégration d'équations différentielles à une seule variable indépendante, des solutions du système proposé renfermant une fonction arbitraire, sans que l'on puisse obtenir pour cela la solution générale du système. Ces cas me paraissent nouveaux et de nature à intéresser les géomètres.

Je ne puis terminer ce résumé rapide sans dire que les transformations que je fais, les méthodes que je suis, se rapprochent beaucoup de celles qui ont été employées par M. Sophus Lie dans ses beaux travaux sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre [1].

---

1. Je me propose d'étudier dans ce Mémoire les deux équations différentielles

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3\,dx_3 + a_4\,dx_4 + a_5\,dx_5 + a_6\,dx_6 = 0,\\ b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2 + b_3\,dx_3 + b_4\,dx_4 + b_5\,dx_5 + b_6\,dx_6 = 0,\end{array}\right.$$

les quantités a et b étant des fonctions quelconques des quantités x.

[1] Les résultats démontrés dans ce Mémoire ont été publiés, dès 1895, dans une courte Note qui a paru dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. V, n° 2.

Les solutions de ces équations, quel que soit le nombre des variables indépendantes, résulteront des différentes formes auxquelles on peut réduire ce système.

Je vais énumérer ces formes. Les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_6$ seront des fonctions des quantités x qui peuvent être prises pour nouvelles variables; les quantités c désigneront des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_6$; H et K deux fonctions de $y_1, \ldots, y_5$. Ces formes sont les suivantes :

I. $\quad dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0,$

II. $\quad dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4 dy_2 = 0,$

III. $\quad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4 dy_1 = 0,$

IV. $\quad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_4 - y_5 dy_1 = 0,$

V. $\quad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - \mathrm{H}\, dy_1 - \mathrm{K}\, dy_4 = 0,$

VI. $\quad dy_1 = 0, \qquad dy_4 - y_5 dy_2 - y_6 dy_3 = 0,$

VII. $\quad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_5 - y_6 dy_4 = 0,$

VIII. $\quad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad c_1 dy_1 + c_3 dy_3 + c_4 dy_4 + c_5 dy_5 = 0,$

IX. $\quad dy_3 - y_4 dy_1 - y_5 dy_2 = 0, \qquad c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + c_4 dy_4 + c_5 dy_5 = 0.$

Je désignerai par

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4, \quad g_5, \quad g_6$$

des fonctions quelconques des quantités x, et je poserai

$$\frac{dg_i}{dx_j} - \frac{dg_j}{dx_i} = g_{ij},$$

$$g_i g_{jk} + g_j g_{ki} + g_k g_{ij} = g_{ijk},$$

$$b_i a_{jkl} - b_j a_{kli} + b_k a_{lij} - b_l a_{ijk} = \mathrm{L}_{ijkl},$$

$$a_i b_{jkl} - a_j b_{kli} + a_k b_{lij} - a_l b_{ijk} = \mathrm{M}_{ijkl},$$

les indices i, j, k, l ayant les valeurs de quatre des six premiers nombres.

2. Je commencerai par ramener dans le cas général le système (1) à une forme plus simple.

Posons pour cela les équations

$$(2)\qquad a = \lambda_1 \frac{dF_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dx} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dx} + \lambda_4 \frac{dF_4}{dx} + \lambda_5 \frac{dF_5}{dx},$$

$$(3)\qquad b = \mu_1 \frac{dF_1}{dx} + \mu_2 \frac{dF_2}{dx} + \mu_3 \frac{dF_3}{dx} + \mu_4 \frac{dF_4}{dx} + \mu_5 \frac{dF_5}{dx}.$$

Soit maintenant

$$\Delta_1 \frac{dF}{dx_1} + \Delta_2 \frac{dF}{dx_2} + \Delta_3 \frac{dF}{dx_3} + \Delta_4 \frac{dF}{dx_4} + \Delta_5 \frac{dF}{dx_5} + \Delta_6 \frac{dF}{dx_6} = 0$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre, admettant comme solutions F_1, F_2, F_3, F_4, F_5.

On aura les deux relations

$$(4)\qquad a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + a_3\Delta_3 + a_4\Delta_4 + a_5\Delta_5 + a_6\Delta_6 = 0,$$

$$(5)\qquad b_1\Delta_1 + b_2\Delta_2 + b_3\Delta_3 + b_4\Delta_4 + b_5\Delta_5 + b_6\Delta_6 = 0.$$

De l'une des équations (2) l'on tire

$$\begin{aligned}\Delta_1 \frac{da}{dx_1} &+ \Delta_2 \frac{da}{dx_2} + \Delta_3 \frac{da}{dx_3} + \Delta_4 \frac{da}{dx_4} + \Delta_5 \frac{da}{dx_5} + \Delta_6 \frac{da}{dx_6}\\ &= \Delta(\lambda_1)\frac{dF_1}{dx} + \Delta(\lambda_2)\frac{dF_2}{dx} + \Delta(\lambda_3)\frac{dF_3}{dx} + \Delta(\lambda_4)\frac{dF_4}{dx} + \Delta(\lambda_5)\frac{dF_5}{dx}\\ &\quad + \lambda_1\Delta\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \lambda_2\Delta\left(\frac{dF_2}{dx}\right) + \lambda_3\Delta\left(\frac{dF_3}{dx}\right) + \lambda_4\Delta\left(\frac{dF_4}{dx}\right) + \lambda_5\Delta\left(\frac{dF_5}{dx}\right).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{dF}{dx}\right) &= \Delta_1 \frac{d^2F}{dx\,dx_1} + \Delta_2 \frac{d^2F}{dx\,dx_2} + \Delta_3 \frac{d^2F}{dx\,dx_3} + \Delta_4 \frac{d^2F}{dx\,dx_4} + \Delta_5 \frac{d^2F}{dx\,dx_5} + \Delta_6 \frac{d^2F}{dx\,dx_6}\\ &= -\frac{d\Delta_1}{dx}\frac{dF}{dx_1} - \frac{d\Delta_2}{dx}\frac{dF}{dx_2} - \frac{d\Delta_3}{dx}\frac{dF}{dx_3} - \frac{d\Delta_4}{dx}\frac{dF}{dx_4} - \frac{d\Delta_5}{dx}\frac{dF}{dx_5} - \frac{d\Delta_6}{dx}\frac{dF}{dx_6}.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\lambda_1\Delta\left(\frac{dF_1}{dx}\right) &+ \lambda_2\Delta\left(\frac{dF_2}{dx}\right) + \lambda_3\Delta\left(\frac{dF_3}{dx}\right) + \lambda_4\Delta\left(\frac{dF_4}{dx}\right) + \lambda_5\Delta\left(\frac{dF_5}{dx}\right)\\ &= -a_1\frac{d\Delta_1}{dx} - a_2\frac{d\Delta_2}{dx} - a_3\frac{d\Delta_3}{dx} - a_4\frac{d\Delta_4}{dx} - a_5\frac{d\Delta_5}{dx} - a_6\frac{d\Delta_6}{dx}\\ &= \Delta_1\frac{da_1}{dx} + \Delta_2\frac{da_2}{dx} + \Delta_3\frac{da_3}{dx} + \Delta_4\frac{da_4}{dx} + \Delta_5\frac{da_5}{dx} + \Delta_6\frac{da_6}{dx},\end{aligned}$$

en vertu de l'équation (4). Donc on aura finalement l'équation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \Delta_3 a_{i3} + \Delta_4 a_{i4} + \Delta_5 a_{i5} + \Delta_6 a_{i6} \\ &\quad = \Delta(\lambda_1)\frac{dF_1}{dx_i} + \Delta(\lambda_2)\frac{dF_2}{dx_i} \\ &\qquad + \Delta(\lambda_3)\frac{dF_3}{dx_1} + \Delta(\lambda_4)\frac{dF_4}{dx_i} + \Delta(\lambda_5)\frac{dF_5}{dx_i}, \end{aligned}\right.$$

où i prend les valeurs successives 1, 2, ..., 6.

On aura de même

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1 b_{i1} + \Delta_2 b_{i2} + \Delta_3 b_{i3} + \Delta_4 b_{i4} + \Delta_5 b_{i5} + \Delta_6 b_{i6} \\ &\quad = \Delta(\mu_1)\frac{dF_1}{dx_i} + \Delta(\mu_2)\frac{dF_2}{dx_i} \\ &\qquad + \Delta(\mu_3)\frac{dF_3}{dx_i} + \Delta(\mu_4)\frac{dF_4}{dx_i} + \Delta(\mu_5)\frac{dF_5}{dx_i}, \end{aligned}\right.$$

où i prend également les valeurs successives 1, 2, ..., 6.

Désignons par λ et μ deux nouvelles fonctions inconnues et cherchons à déterminer les fonctions λ, μ, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 de façon à satisfaire aux équations (2), (3) et à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_2 + \mu\mu_2) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_3 + \mu\mu_3) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_4 + \mu\mu_4) = 0, \\ &\Delta(\lambda\lambda_5 + \mu\mu_5) = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned} &\lambda_1\Delta(\lambda) + \mu_1\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_1) + \mu\Delta(\mu_1) = 0, \\ &\lambda_2\Delta(\lambda) + \mu_2\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_2) + \mu\Delta(\mu_2) = 0, \\ &\lambda_3\Delta(\lambda) + \mu_3\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_3) + \mu\Delta(\mu_3) = 0, \\ &\lambda_4\Delta(\lambda) + \mu_4\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_4) + \mu\Delta(\mu_4) = 0, \\ &\lambda_5\Delta(\lambda) + \mu_5\Delta(\mu) + \lambda\Delta(\lambda_5) + \mu\Delta(\mu_5) = 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première par $\frac{dF_1}{dx_i}$, la seconde par $\frac{dF_2}{dx_i}$, ..., la cinquième par $\frac{dF_5}{dx_i}$ et ajoutons. On aura

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} a_i\Delta(\lambda) + b_i\Delta(\mu) + \lambda(\Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \Delta_3 a_{i3} \\ + \Delta_4 a_{i4} + \Delta_5 a_{i5} + \Delta_6 a_{i6}) \\ + \mu(\Delta_1 b_{i1} + \Delta_2 b_{i2} + \Delta_3 b_{i3} \\ + \Delta_4 b_{i4} + \Delta_5 b_{i5} + \Delta_6 b_{i6}) = 0, \end{aligned}\right.$$

où i prend les valeurs successives 1, 2, ..., 6. Joignons-y les équations (4), (5) et écrivons-les toutes. On aura le système suivant

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\Delta(\lambda) + b_1\Delta(\mu) + \Delta_1(\lambda a_{11} + \mu b_{11}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{16} + \mu b_{16}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_6\Delta(\lambda) + b_6\Delta(\mu) + \Delta_1(\lambda a_{61} + \mu b_{61}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{66} + \mu b_{66}) = 0, \\ \qquad\qquad \Delta_1 a_1 \qquad\qquad + \ldots + \Delta_6 a_6 \qquad\qquad = 0, \\ \qquad\qquad \Delta_1 b_1 \qquad\qquad + \ldots + \Delta_6 b_6 \qquad\qquad = 0. \end{array}\right.$$

Considérons ces équations comme des équations homogènes dans les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6, \Delta(\lambda), \Delta(\mu)$; on aura, par élimination, le déterminant suivant :

$$(11)\quad \begin{vmatrix} 0 & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \ldots & \lambda a_{16} + \mu b_{16} & a_1 & b_1 \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & 0 & \ldots & \lambda a_{26} + \mu b_{26} & a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{61} + \mu b_{61} & \lambda a_{62} + \mu b_{62} & \ldots & 0 & a_6 & b_6 \\ a_1 & -a_2 & \ldots & -a_6 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est symétrique gauche d'ordre pair. Il est donc carré parfait et il est aisé de voir qu'il est le carré parfait d'une fonction homogène et du second degré en λ et μ. Soit $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ une valeur du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ satisfaisant

à l'équation (11), on en aura toujours au moins une. On aura

$$(12)\qquad \begin{cases} \lambda = \lambda_1 k, & \Delta(\lambda) = \lambda_1 \Delta(k) + k\Delta(\lambda_1), \\ \mu = \mu_1 k, & \Delta(\mu) = \mu_1 \Delta(k) + k\Delta(\mu_1). \end{cases}$$

Les équations (10) se réduisent à six distinctes au plus, car on sait que, quand un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est nul, il en est de même de tous ses mineurs du premier ordre. On pourra donc toujours satisfaire aux équations (10) par des formules de la forme, α et β désignant deux arbitraires,

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = A_1 \alpha + B_1 \beta, \\ \Delta_2 = A_2 \alpha + B_2 \beta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta_6 = A_6 \alpha + B_6 \beta, \\ \dfrac{\Delta(\lambda)}{k} = A\ \alpha + B\ \beta, \\ \dfrac{\Delta(\mu)}{k} = A' \alpha + B' \beta. \end{cases}$$

Posons

$$A_1 \frac{dF}{dx_1} + A_2 \frac{dF}{dx_2} + A_3 \frac{dF}{dx_3} + A_4 \frac{dF}{dx_4} + A_5 \frac{dF}{dx_5} + A_6 \frac{dF}{dx_6} = \Delta_1(F),$$

$$B_1 \frac{dF}{dx_1} + B_2 \frac{dF}{dx_2} + B_3 \frac{dF}{dx_3} + B_4 \frac{dF}{dx_4} + B_5 \frac{dF}{dx_5} + B_6 \frac{dF}{dx_6} = \Delta_2(F),$$

et les deux dernières équations (12) deviennent

$$\left[\lambda_1 \frac{\Delta_1(k)}{k} + \Delta_1(\lambda_1) - A\right]\alpha + \left[\lambda_1 \frac{\Delta_2(k)}{k} + \Delta_2(\lambda_1) - B\right]\beta = 0,$$

$$\left[\mu_1 \frac{\Delta_1(k)}{k} + \Delta_1(\mu_1) - A'\right]\alpha + \left[\mu_1 \frac{\Delta_2(k)}{k} + \Delta_2(\mu_1) - B'\right]\beta = 0.$$

On en tire, en multipliant la première par μ_1, la seconde par λ_1, et retranchant,

$$|\mu_1 \Delta_1(\lambda_1) - \lambda_1 \Delta_1(\mu_1) + A'\lambda_1 - A\mu_1|\,\alpha$$
$$+ |\mu_1 \Delta_2(\lambda_1) - \lambda_1 \Delta_2(\mu_1) + B'\lambda_1 - B\mu_1|\,\beta = 0,$$

qui donne toujours une valeur pour le rapport de α à β.

On a ensuite k par une équation de la forme

$$C_1\frac{dk}{dx_1}+C_2\frac{dk}{dx_2}+C_3\frac{dk}{dx_3}+C_4\frac{dk}{dx_4}+C_5\frac{dk}{dx_5}+C_6\frac{dk}{dx_6}=Ck.$$

On peut aussi diriger de la manière suivante la résolution des équations (10) maintenant que l'on sait que ce système est possible.

En vertu de l'équation (4) on a, u étant une fonction quelconque

$$\begin{aligned}a_i\Delta(u)+u\,|\Delta_1 a_{i1}+\Delta_2 a_{i2}+\Delta_3 a_{i3}+\Delta_4 a_{i4}+\Delta_5 a_{i5}+\Delta_6 a_{i6}|\\ =\Delta_1(au)_{i1}+\Delta_2(au)_{i2}+\ldots+\Delta_6(au)_{i6},\end{aligned}$$

et les équations (10) peuvent, en tenant compte de cette équation et de (12), s'écrire de la manière suivante :

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{lll}(a_1\lambda_1+b_1\mu_1)\dfrac{\Delta k}{k}+\Delta_1(a\lambda_1+b\mu_1)_{11}+\ldots+\Delta_6(a\lambda_1+b\mu_1)_{16}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_6\lambda_1+b_6\mu_1)\dfrac{\Delta k}{k}+\Delta_1(a\lambda_1+b\mu_1)_{61}+\ldots+\Delta_6(a\lambda_1+b\mu_1)_{66}=0,\\ \qquad\qquad\Delta_1 a_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta_6 a_6 \qquad\qquad =0,\\ \qquad\qquad\Delta_1 b_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta_6 b_6 \qquad\qquad =0;\end{array}\right.$$

ces équations en $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \dfrac{\Delta k}{k}$ seront compatibles et fourniront au moins un système de valeurs proportionnelles, soit

$$\frac{\Delta_1}{C_1}=\frac{\Delta_2}{C_2}=\frac{\Delta_3}{C_3}=\ldots=\frac{\Delta_6}{C_6}=\frac{\Delta k}{kC},$$

d'où

$$(15)\qquad C_1\frac{dk}{dx_1}+C_2\frac{dk}{dx_2}+C_3\frac{dk}{dx_3}+C_4\frac{dk}{dx_4}+C_5\frac{dk}{dx_5}+C_6\frac{dk}{dx_6}=Ck.$$

En prenant pour $F_1, F_2, \ldots, F_5$ cinq solutions distinctes de l'équation

$$C_1\frac{dF}{dx_1}+C_2\frac{dF}{dx_2}+C_3\frac{dF}{dx_3}+C_4\frac{dF}{dx_4}+C_5\frac{dF}{dx_5}+C_6\frac{dF}{dx_6}=0,$$

et pour k une solution de l'équation (15), les six premières équations (10) fournissent les équations (8). En vertu des deux dernières équations (10), les équations (2) et (3) fournissent des valeurs pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_5$.

Le système différentiel (1) peut donc toujours être mis sous la forme

$$\lambda_1\, dF_1 + \lambda_2\, dF_2 + \lambda_3\, dF_3 + \lambda_4\, dF_4 + \lambda_5\, dF_5 = 0,$$
$$\mu_1\, dF_1 + \mu_2\, dF_2 + \mu_3\, dF_3 + \mu_4\, dF_4 + \mu_5\, dF_5 = 0,$$

où l'une de ces équations peut être remplacée par la suivante :

$$(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\, dF_1 + (\lambda\lambda_2 + \mu\mu_2)\, dF_2 + (\lambda\lambda_3 + \mu\mu_3)\, dF_3 + (\lambda\lambda_4 + \mu\mu_4)\, dF_4 + (\lambda\lambda_5 + \mu\mu_5)\, dF_5 = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. En somme, en désignant par y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ces fonctions, le système proposé peut toujours être ramené à la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} A_1\, dy_1 + A_2\, dy_2 + A_3\, dy_3 + A_4\, dy_4 + A_5\, dy_5 = 0,\\ B_1\, dy_1 + B_2\, dy_2 + B_3\, dy_3 + B_4\, dy_4 + B_5\, dy_5 = 0,\end{cases}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ne sont fonctions que de y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, et où B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 contiennent en général une sixième variable y_6.

5. Je vais maintenant étudier un cas particulier qui se relie immédiatement à la forme réduite que nous venons de trouver.

C'est celui où le système (1) peut être ramené à la formule (16), dans laquelle les coefficients B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ne dépendent que des variables y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Dans ce cas, on peut déterminer des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5, λ, λ', μ, μ' satisfaisant aux équations (2), (3), par suite à (4), (5) et aux suivantes :

$$\Delta(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta(\lambda\lambda_5 + \mu\mu_5) = 0,$$
$$\Delta(\lambda'\lambda_1 + \mu'\mu_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta(\lambda'\lambda_5 + \mu'\mu_5) = 0.$$

Les deux premières de ces équations développées sont

$$\lambda\Delta(\lambda_1) + \mu\Delta(\mu_1) + \lambda_1\Delta(\lambda) + \mu_1\Delta(\mu) = 0,$$
$$\lambda'\Delta(\lambda_1) + \mu'\Delta(\mu_1) + \lambda_1\Delta(\lambda') + \mu_1\Delta(\mu') = 0;$$

comme $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ est différent de zéro, on peut les résoudre par rapport à $\Delta(\lambda_1)$, $\Delta(\mu_1)$ et l'on en tire

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta(\lambda_1) &= \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \\ \Delta(\mu_1) &= \alpha'\lambda_1 + \beta'\mu_1. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations on peut remplacer λ_1 et μ_1 par λ_2 et μ_2, ..., λ_5 et μ_5.

Inversement, supposons que les quantités λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, ..., λ_5, μ_5 des équations (2) et (3) satisfassent aux relations

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Delta(\lambda_1) = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, & \Delta(\mu_1) = \alpha'\lambda_1 + \beta'\mu_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta(\lambda_5) = \alpha\lambda_5 + \beta\mu_5, & \Delta(\mu_5) = \alpha'\lambda_5 + \beta'\mu_5, \end{array}\right.$$

α, β, α', β' étant convenablement choisis. Supposons $\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2$ différent de zéro et évaluons l'expression

$$\Delta\left(\frac{\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3}{\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}\right),$$

c'est

$$\frac{1}{(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^2}\big[(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)\Delta(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)$$
$$- (\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)\Delta(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)\big].$$

Le numérateur de cette expression est

$$(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)\big[\lambda_1\Delta(\mu_3) + \mu_3\Delta(\lambda_1) - \mu_1\Delta(\lambda_3) - \lambda_3\Delta(\mu_1)\big]$$
$$- (\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)\big[\lambda_1\Delta(\mu_2) + \mu_2\Delta(\lambda_1) - \mu_1\Delta(\lambda_2) - \lambda_2\Delta(\mu_1)\big],$$

ou

$$\lambda_1 [\Delta(\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3) + \Delta(\mu_2)(\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1) + \Delta(\mu_3)(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)]$$
$$- \mu_1 [\Delta(\lambda_1)(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3) + \Delta(\lambda_2)(\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1) + \Delta(\lambda_3)(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)]$$
$$= \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \Delta(\mu_1) \\ \lambda_2 & \mu_2 & \Delta(\mu_2) \\ \lambda_3 & \mu_3 & \Delta(\mu_3) \end{vmatrix} - \mu_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \Delta(\lambda_1) \\ \lambda_2 & \mu_2 & \Delta(\lambda_2) \\ \lambda_3 & \mu_3 & \Delta(\lambda_3) \end{vmatrix}.$$

En tenant compte des équations (18), on voit que ce second membre est nul. Donc, le système (1) étant mis sous la forme

$$\lambda_1 dF_1 + \lambda_2 dF_2 + \lambda_3 dF_3 + \lambda_4 dF_4 + \lambda_5 dF_5 = 0,$$
$$\mu_1 dF_1 + \mu_2 dF_2 + \mu_3 dF_3 + \mu_4 dF_4 + \mu_5 dF_5 = 0,$$

si l'on résout ces équations par rapport à dF_1, dF_2, les coefficients de dF_3, dF_4, dF_5, dans les deux équations ainsi obtenues, seront des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Donc il suffit de satisfaire aux équations (2), (3) et (18).

Pour y satisfaire il suffit, d'autre part, de satisfaire à (4), (5) et au système suivant :

$$(19)\quad \begin{cases} \Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \Delta_3 a_{i3} + \Delta_4 a_{i4} + \Delta_5 a_{i5} + \Delta_6 a_{i6} = \alpha\, a_i + \beta\, b_i, \\ \Delta_1 b_{i1} + \Delta_2 b_{i2} + \Delta_3 b_{i3} + \Delta_4 b_{i4} + \Delta_5 b_{i5} + \Delta_6 b_{i6} = \alpha' a_i + \beta' b_i. \end{cases}$$

Je vais faire voir que, pour que l'on puisse satisfaire aux équations (4), (5) et (19), il faut et il suffit que l'équation (11) soit une identité.

D'abord, cela est nécessaire.

En effet, multiplions la première équation (19) par λ, la seconde par μ et ajoutons, on aura

$$\Delta_1(\lambda a_{i1} + \mu b_{i1}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{i6} + \mu b_{i6})$$
$$= (\alpha\lambda + \alpha'\mu) a_i + (\beta\lambda + \beta'\mu) b_i.$$

Joignons à ces équations (4) et (5) et considérons-y comme inconnues

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6, \alpha\lambda + \alpha'\mu, \beta\lambda + \beta'\mu$. Elles seront satisfaites. Donc leur déterminant sera nul. Or, c'est précisément (11). Donc l'équation (11) doit être satisfaite quelles que soient λ et μ; c'est bien une identité.

Inversement, écrivons les équations

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Delta_1(\lambda a_{11} + \mu b_{11}) & + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{16} + \mu b_{16}) & = \gamma a_1 + \delta b_1, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \Delta_1(\lambda a_{61} + \mu b_{61}) & + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{66} + \mu b_{66}) & = \gamma a_6 + \delta b_6, \\ \Delta_1 a_1 & + \ldots + \Delta_6 a_6 & = 0, \\ \Delta_1 b_1 & + \ldots + \Delta_6 b_6 & = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations, quelles que soient λ et μ, se réduisent à six distinctes au plus, car on sait que quand un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est nul, il en est de même de tous ses mineurs du premier ordre.

Elles admettront donc toujours au moins deux systèmes de solutions distincts pour les inconnues $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \gamma, \delta$ et l'on voit immédiatement que les deux systèmes de valeurs de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ sont distincts. Soient pour $\mu = 0, \lambda = 1$

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_2, \quad \ldots, \quad \Lambda_6$$

un de ces systèmes. Posons

$$\Lambda_1 b_{i1} + \Lambda_2 b_{i2} + \ldots + \Lambda_6 b_{i6} = R_i.$$

Si l'on avait les relations

$$(21)\qquad R_i = \omega a_i + \omega' b_i,$$

les équations (19) seraient satisfaites avec les valeurs Λ_i données aux Δ_i. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi.

Soient alors, pour un second système de valeurs de λ et μ, λ' et μ',

$$\Delta'_i = \rho C_i + \rho' D_i,$$

les valeurs des Δ satisfaisant aux équations (20). Soient enfin, pour un

troisième système de valeurs de λ et μ, λ'' et μ''

$$\Delta''_i = \sigma E_i + \sigma' F_i,$$

les valeurs des Δ satisfaisant aux équations (20); ρ, ρ', σ, σ' sont quelconques.

Prenons les équations (20) où l'on a $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et $\Delta_i = A_i$; multiplions-les par $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_6$ et ajoutons il viendra

$$\Sigma a_{ij} \Delta'_i A_j = 0.$$

Prenons les équations (20) où l'on a $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\Delta_i = \Delta'_i$; multiplions-les par $A_1, \ldots, A_6$ et ajoutons; il vient

$$\lambda' \Sigma a_{ij} A_i \Delta'_j + \mu' \Sigma b_{ij} A_i \Delta'_j = 0.$$

On aura donc

$$\Sigma b_{ij} A_i \Delta'_j = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma R_i (\rho C_i + \rho' D_i) = 0,$$

c'est-à-dire séparément

$$R_1 C_1 + \ldots + R_6 C_6 = 0,$$
$$R_1 D_1 + \ldots + R_6 D_6 = 0;$$

on aura de même

$$R_1 E_1 + \ldots + R_6 E_6 = 0,$$
$$R_1 F_1 + \ldots + R_6 F_6 = 0.$$

Si donc on considère les équations

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 X_1 + \ldots + a_6 X_6 = 0, \\ b_1 X_1 + \ldots + b_6 X_6 = 0, \\ R_1 X_1 + \ldots + R_6 X_6 = 0, \end{array} \right.$$

elles sont satisfaites pour les valeurs

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1, C_2, \ldots, C_6, \\ D_1, D_2, \ldots, D_6, \\ E_1, E_2, \ldots, E_6, \\ F_1, F_2, \ldots, F_6, \end{array} \right.$$

données aux quantités $X_1, \ldots, X_6$. Mais les équations (22) sont distinctes, puisque les équations (21) n'ont pas lieu. Donc les quatre systèmes de valeurs (23) rentrent dans trois d'entre eux. On peut donc déterminer des quantités ν, ν', ν'', ν''' telles que l'on ait

$$\nu C_i + \nu' D_i = \nu'' E_i + \nu''' F_i.$$

Le système de valeurs des Δ_i

$$\Delta_i = \nu C_i + \nu' D_i = \nu'' E_i + \nu''' F_i,$$

satisfait donc aux équations (19), (4) et (5), puisqu'il satisfait aux équations (20) pour deux systèmes de valeurs différentes de λ et μ.

Donc, on peut toujours satisfaire aux équations (19), (4) et (5), quand l'équation (11) est une identité.

4. Je vais maintenant commencer l'examen des cas particuliers du système (1), en passant rapidement sur les premiers cas, dont l'étude résulte immédiatement de cas déjà traités dans un précédent Mémoire (*Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. V, n° I).

Le premier cas est celui où l'on peut déterminer des quantités λ, μ, λ', μ', F_1, F_2 satisfaisant aux équations

$$a = \lambda \frac{dF_1}{dx} + \mu \frac{dF_2}{dx},$$

$$b = \lambda' \frac{dF_1}{dx} + \mu' \frac{dF_2}{dx}.$$

La condition pour qu'il en soit ainsi est que le système d'équations obtenues en prenant dans le Tableau suivant trois colonnes quelconques, forme un système complet à deux fonctions distinctes

$$(24) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} & \frac{dF}{dx_4} & \frac{dF}{dx_5} & \frac{dF}{dx_6} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix} \right\|.$$

Les conditions développées sont que toutes les quantités

$$L_{ijkl}, \quad M_{ijkl}$$

soient nulles; i, j, k, l étant quatre des nombres 1, 2, ..., 6.

Le système (1) est alors réductible à la forme

$$(I) \qquad dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0.$$

Le second cas est celui où l'on peut déterminer des fonctions λ_1, μ_1, F_1 satisfaisant aux équations

$$\lambda_1 a + \mu_1 b = \frac{dF_1}{dx}.$$

Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont que le système (24) forme un système complet à une solution. Il faut d'abord que tous les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

soient égaux. Désignant par $\frac{L}{M}$ leur valeur commune, posons

$$c = aM + bL,$$

il faudra de plus que les quantités

$$c_{ijk}$$

soient toutes nulles, i, j, k étant trois des nombres 1, 2, ..., 6. Remarquons maintenant que si l'on remplace l'une des équations (1), par exemple la première, par la combinaison linéaire

$$\Sigma(\lambda_1 a + \mu_1 b) dx = dF_1,$$

l'équation du second degré en $\frac{\mu}{\lambda}$ a ses deux racines nulles. L'équation du second degré en $\frac{\mu}{\lambda}$ correspondant au système (1) aura donc ses

racines égales. La seconde équation (1) pourra toujours, du reste, être mise sous l'une des deux formes

$$dF_4 - F_5\,dF_2 - F_6\,dF_3 = 0, \qquad dF_3 - F_4\,dF_2 = 0;$$

dans le second cas, l'équation en $\frac{\mu}{\lambda}$ sera une identité; dans le premier, elle ne sera que carré parfait. On aura les deux formes

$$\text{(II)} \qquad dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4\,dy_2 = 0,$$

$$\text{(VI)} \qquad dy_1 = 0, \qquad dy_4 - y_5\,dy_2 - y_6\,dy_3 = 0.$$

Le troisième cas est celui où l'on peut mettre le système différentiel (1) sous la forme

$$dF_2 - F_3\,dF_1 = 0,$$
$$dF_3 - F_4\,dF_1 = 0.$$

On peut alors déterminer des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, λ, μ, λ', μ' de façon à satisfaire aux équations

$$\frac{dF_2}{dx} - F_3\frac{dF_1}{dx} = \lambda a + \mu b,$$
$$\frac{dF_3}{dx} - F_4\frac{dF_1}{dx} = \lambda' a + \mu' b.$$

On sait, d'après ce qui a été fait dans le Mémoire rappelé plus haut, qu'il faut d'abord que tous les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

soient égaux. Désignant la valeur commune par $\frac{L}{M}$, il faut de plus que l'équation

$$\Sigma(aM + bL)\,dx = 0,$$

soit réductible à la forme

$$dF_2 - F_3\,dF_1 = 0.$$

Je vais démontrer que, si les rapports précédents sont égaux, cela a toujours lieu.

Pour que l'équation

$$\Sigma(a\text{M} + b\text{L})dx = 0$$

soit réductible à la forme

$$d\text{F}_2 - \text{F}_3 d\text{F}_1 = 0,$$

il faut et il suffit que le déterminant

$$(25)\quad \begin{vmatrix} (a\text{M}+b\text{L})_{11} & \dots & (a\text{M}+b\text{L})_{16} & a_1\text{M}+b_1\text{L} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (a\text{M}+b\text{L})_{61} & \dots & (a\text{M}+b\text{L})_{66} & a_6\text{M}+b_6\text{L} \\ -(a_1\text{M}+b_1\text{L}) & \dots & -(a_6\text{M}+b_6\text{L}) & 0 \end{vmatrix}$$

ait tous ses mineurs du premier ordre symétriques par rapport à la diagonale principale nuls. Or, d'après ce qu'on a vu dans le Mémoire précédemment rappelé, il en est ainsi de tous, excepté de celui qu'on obtient en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.

Or, considérons des équations du premier degré ayant pour déterminant des inconnues le déterminant précédent. Soient $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6, \alpha$ les inconnues. On voit que, si l'on fait par exemple $\Delta_1 = 0$, on peut satisfaire au système par des valeurs convenables de $\Delta_2, \dots, \Delta_6, \alpha$ car les six dernières se réduisent à quatre au plus. De même, on aura un autre système de solutions pour lequel Δ_2 est nul, etc., enfin un système pour lequel Δ_6 est nul Or, tous ces systèmes ne peuvent se réduire au même, car on aurait alors

$$a_1\text{M} + b_1\text{L} = 0, \qquad a_6\text{M} + b_6\text{L} = 0;$$

les quantités $a_1, \dots, a_6$ seraient proportionnelles à $b_1, \dots, b_6$. On a donc deux systèmes de solutions distincts satisfaisant aux équations considérées et, par suite, tous les mineurs du premier ordre sont nuls.

Donc, dans le cas où tous les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

sont égaux, le système (1) est réductible à la forme

$$\text{(III)} \qquad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4 dy_1 = 0.$$

On peut remarquer que dans ce cas, l'équation (11) étant une identité, la valeur $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{M}{L}$ y satisfait. Or, tous les mineurs du second ordre, obtenus en supprimant deux lignes ou deux colonnes se coupant sur la diagonale principale parmi les six premières ayant pour valeur

$$(\lambda L_{ijkl} - \mu M_{ijkl})^2,$$

sont nuls pour la valeur $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{M}{L}$.

D'après les formules connues qui donnent le développement d'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair, on en conclura que tous les mineurs obtenus en supprimant deux lignes et deux colonnes symétriques par rapport à la diagonale principale, une des lignes étant la septième ou la huitième, sont aussi nuls. Enfin, d'après le raisonnement fait tout à l'heure sur le déterminant (25), il faudra que le mineur obtenu en supprimant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes soit aussi nul et, par suite, tous les mineurs du second ordre de (11) seront nuls pour la valeur $\frac{M}{L}$ donnée à $\frac{\lambda}{\mu}$.

Le quatrième cas est celui où l'on peut satisfaire aux équations

$$a = \lambda_1 \frac{dF_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dx} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dx},$$

$$b = \mu_1 \frac{dF_1}{dx} + \mu_2 \frac{dF_2}{dx} + \mu_3 \frac{dF_3}{dx},$$

$F_1, F_2, F_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ étant des fonctions convenablement choisies.

Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont, d'après le Mémoire pré-

cédemment rappelé, que les équations

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&L_{2345}\frac{dF}{dx_1}+L_{3451}\frac{dF}{dx_2}+L_{4512}\frac{dF}{dx_3}+L_{5123}\frac{dF}{dx_4}+L_{1234}\frac{dF}{dx_5}=0,\\
&L_{3456}\frac{dF}{dx_2}+L_{4562}\frac{dF}{dx_3}+L_{5623}\frac{dF}{dx_4}+L_{6234}\frac{dF}{dx_5}+L_{2345}\frac{dF}{dx_6}=0,\\
&L_{4561}\frac{dF}{dx_3}+L_{5613}\frac{dF}{dx_4}+L_{6134}\frac{dF}{dx_5}+L_{1345}\frac{dF}{dx_6}+L_{3456}\frac{dF}{dx_1}=0,\\
&L_{5612}\frac{dF}{dx_4}+L_{6124}\frac{dF}{dx_5}+L_{1245}\frac{dF}{dx_6}+L_{2456}\frac{dF}{dx_1}+L_{4561}\frac{dF}{dx_2}=0,\\
&L_{6123}\frac{dF}{dx_5}+L_{1235}\frac{dF}{dx_6}+L_{2356}\frac{dF}{dx_1}+L_{3561}\frac{dF}{dx_2}+L_{5612}\frac{dF}{dx_3}=0,\\
&L_{1234}\frac{dF}{dx_6}+L_{2346}\frac{dF}{dx_1}+L_{3461}\frac{dF}{dx_2}+L_{4612}\frac{dF}{dx_3}+L_{6123}\frac{dF}{dx_4}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

et celles qu'on obtient en y changeant L en M, que nous désignerons par (26 *bis*), forment un système complet à trois fonctions distinctes.

Si nous considérons les équations (10), comme les rapports

$$\frac{L_{ijkl}}{M_{ijkl}}$$

ne sont pas égaux, on a pour les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ les systèmes suivants de valeurs se réduisant à deux distincts

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda L_{2345}-\mu M_{2345},\quad \lambda L_{3451}-\mu M_{3451},\quad \lambda L_{4512}-\mu M_{4512},\\
&\qquad \lambda L_{5123}-\mu M_{5123},\quad \lambda L_{1234}-\mu M_{1234},\quad 0,\\
&0,\quad \lambda L_{3456}-\mu M_{3456},\quad \lambda L_{4562}-\mu M_{4562},\quad \lambda L_{5623}-\mu M_{5623},\\
&\qquad \lambda L_{6234}-\mu M_{6234},\quad \lambda L_{2345}-\mu M_{2345},\\
&\lambda L_{3456}-\mu M_{3456},\quad 0,\quad \lambda L_{4561}-\mu M_{4561},\quad \lambda L_{5613}-\mu M_{5613},\\
&\qquad \lambda L_{6134}-\mu M_{6134},\quad \lambda L_{1345}-\mu M_{1345},\\
&\lambda L_{2456}-\mu M_{2456},\quad \lambda L_{4561}-\mu M_{4561},\quad 0,\quad \lambda L_{5612}-\mu M_{5612},\\
&\qquad \lambda L_{6124}-\mu M_{6124},\quad \lambda L_{1245}-\mu M_{1245},\\
&\lambda L_{2356}-\mu M_{2356},\quad \lambda L_{3561}-\mu M_{3561},\quad \lambda L_{5612}-\mu M_{5612},\quad 0,\\
&\qquad \lambda L_{6123}-\mu M_{6123},\quad \lambda L_{1235}-\mu M_{1235},\\
&\lambda L_{2346}-\mu M_{2346},\quad \lambda L_{3461}-\mu M_{3461},\quad \lambda L_{4612}-\mu M_{4612},\\
&\qquad \lambda L_{6123}-\mu M_{6123},\quad 0,\quad \lambda L_{1234}-\mu M_{1234}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je désignerai deux de ces systèmes par

$$\lambda L_1 - \mu M_1, \quad \lambda L_2 - \mu M_2, \quad \lambda L_3 - \mu M_3, \quad \lambda L_4 - \mu M_4,$$
$$\lambda L_5 - \mu M_5, \quad \lambda L_6 - \mu M_6,$$
$$\lambda l_1 - \mu m_1, \quad \lambda l_2 - \mu m_2, \quad \lambda l_3 - \mu m_3, \quad \lambda l_4 - \mu m_4,$$
$$\lambda l_5 - \mu m_5, \quad \lambda l_6 - \mu m_6.$$

Les équations (26) et (26 *bis*) devant former un système complet à trois fonctions distinctes doivent d'abord se réduire algébriquement à trois. Ces conditions sont toujours remplies quand l'équation (11) est une identité. Il faudra, de plus, que ces trois équations forment un système complet. Dans ce cas, le système est réductible à la forme

$$\text{(IV)} \qquad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_4 - y_5 dy_1 = 0.$$

Je placerai maintenant ici le cas où l'équation (11) est une identité. Le système est alors réductible à la forme

$$\text{(V)} \qquad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - \mathrm{H}\, dy_1 - \mathrm{K}\, dy_4 = 0,$$

H et K étant deux fonctions de $y_1, \ldots, y_5$ d'après ce qui a été fait dans le Mémoire précédemment rappelé.

5. Je vais maintenant m'occuper du cas particulier où l'on peut trouver des fonctions F_1, F_2, F_3, λ, μ satisfaisant aux équations

$$(28) \qquad a\lambda + b\mu = \frac{dF_2}{dx} - F_3 \frac{dF_1}{dx};$$

une des équations du système (1) peut, dans ce cas, être remplacée par

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

Occupons-nous du système (28). Soit

$$\Delta_1 \frac{dF}{dx_1} + \Delta_2 \frac{dF}{dx_2} + \Delta_3 \frac{dF}{dx_3} + \Delta_4 \frac{dF}{dx_4} + \Delta_5 \frac{dF}{dx_5} + \Delta_6 \frac{dF}{dx_6} = 0$$

une équation du premier ordre à laquelle satisfont les fonctions F_1, F_2, F_3, on aura

$$\lambda\Sigma a\Delta + \mu\Sigma b\Delta = 0.$$

Nous admettrons en plus que l'on a séparément

$$(29)\qquad \Sigma a\Delta = 0, \qquad \Sigma b\Delta = 0;$$

on voit qu'il reste encore deux coefficients Δ arbitraires. De même que du système (2) on a déduit les équations (6), on tirera du système (28) les équations

$$(30)\qquad \Delta_1(\lambda a + \mu b)_{i1} + \ldots + \Delta_6(\lambda a + \mu b)_{i6} = 0,$$

ou, en développant et tenant compte de (29),

$$a_i\Delta(\lambda) + b_i\Delta(\mu) + \Delta_1(\lambda a_{i1} + \mu b_{i1}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{i6} + \mu b_{i6}) = 0,$$

on retrouve les équations (10). L'équation (11) devra donc être satisfaite et fournira deux valeurs pour le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. On prendra successivement ces valeurs, et le système ayant été mis sous la forme (16)

$$A_1 dy_1 + A_2 dy_2 + A_3 dy_3 + A_4 dy_4 + A_5 dy_5 = 0,$$
$$B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + B_3 dy_3 + B_4 dy_4 + B_5 dy_5 = 0,$$

où les A ne contiennent pas y_6, il sera nécessaire et suffisant que la première des équations se mette sous la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

On peut aisément obtenir les conditions pour qu'il en soit ainsi. Nous avons, en effet, déterminé les deux valeurs possibles du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. Il sera donc nécessaire et suffisant que l'équation

$$\Sigma(a\lambda + b\mu)dx = 0$$

se réduise à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

Pour cela, il suffit que tous les mineurs du premier ordre, symétriques par rapport à la diagonale principale du déterminant

$$(31)\quad \begin{vmatrix} 0 & (a\lambda + b\mu)_{12} & \dots & (a\lambda + b\mu)_{16} & a_1\lambda + b_1\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a\lambda + b\mu)_{61} & (a\lambda + b\mu)_{62} & \dots & 0 & a_6\lambda + b_6\mu \\ -(a_1\lambda + b_1\mu) & -(a_2\lambda + b_2\mu) & \dots & -(a_6\lambda + b_6\mu) & 0 \end{vmatrix},$$

soient nuls. Nous avons vu qu'il suffit d'écrire ceux qui s'obtiennent en supprimant une ligne et une colonne se coupant sur la diagonale principale parmi les six premiers. Les conditions sont suffisantes et même renferment l'équation (11).

Nous avons vu que les équations (10) fournissent pour les Δ deux systèmes distincts explicités dans les formules (27) que nous avons représentés par

$$\lambda L_1 - \mu M_1, \quad \dots, \quad \lambda L_6 - \mu M_6$$
$$\lambda l_1 - \mu m_1, \quad \dots, \quad \lambda l_6 - \mu m_6;$$

par conséquent les équations

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma(\lambda L - \mu M)\frac{dF}{dx} = 0 \\ &\Sigma(\lambda l - \mu m)\frac{dF}{dx} = 0 \end{aligned} \right.$$

devront avoir trois solutions communes distinctes. Je dis qu'inversement, quand ces équations ont trois solutions communes distinctes, on peut former une combinaison des équations (1) se réduisant à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

Pour le faire voir, considérons les équations (20) :

$$\begin{array}{l}
\Delta_1(\lambda a_{11}+\mu b_{11})+\ldots+\Delta_6(\lambda a_{16}+\mu b_{16})=\gamma a_1+\delta b_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_1(\lambda a_{61}+\mu b_{61})+\ldots+\Delta_6(\lambda a_{66}+\mu b_{66})=\gamma a_6+\delta b_6.\\
\Delta_1 \quad a_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta_6 \quad a_6 \qquad\qquad =0,\\
\Delta_1 \quad b_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta_6 \quad b_6 \qquad\qquad =0.
\end{array}$$

Supposons que nous substituions aux variables x d'autres variables x' et supposons que les équations

$$\Sigma a\, dx=0, \qquad \Sigma b\, dx=0$$

deviennent

$$\Sigma a'\, dx'=0, \qquad \Sigma b'\, dx'=0.$$

Les équations (20) ont des solutions en $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \gamma, \delta$ quand l'équation (11) est satisfaite, et soit $F(x_1, \ldots, x_6)$ une fonction satisfaisant à l'équation

$$\Delta_1 \frac{dF}{dx_1}+\ldots+\Delta_6 \frac{dF}{dx_6}=0;$$

par le changement de variables, F deviendra une fonction

$$\Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6).$$

Elle satisfera alors à l'équation

$$\Delta'_1 \frac{d\Phi}{dx'_1}+\ldots+\Delta'_6 \frac{d\Phi}{dx'_6}=0,$$

où les $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_6$ satisfont aux équations

$$\begin{array}{l}
\Delta'_1(\lambda a'_{11}+\mu b'_{11})+\ldots+\Delta'_6(\lambda a'_{16}+\mu b'_{16})=\gamma a'_1+\delta b'_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta'_1(\lambda a'_{61}+\mu b'_{61})+\ldots+\Delta'_6(\lambda a'_{66}+\mu b'_{66})=\gamma a'_6+\delta b'_6,\\
\Delta'_1 \quad a'_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta'_6 \quad a'_6 \qquad\qquad =0,\\
\Delta'_1 \quad b'_1 \qquad\qquad +\ldots+\Delta'_6 \quad b'_6 \qquad\qquad =0,
\end{array}$$

γ et δ ayant les mêmes valeurs que précédemment.

Ce théorème résulte immédiatement de la propriété d'invariance de la quantité $\Sigma a_{ik} dx_i \delta x_k$ que M. Darboux a prise pour point de départ de la méthode si simple qu'il a suivie pour obtenir les formes réduites d'une équation de Pfaff (voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI). Si donc les équations (32) ont trois solutions communes distinctes, il en sera de même des équations correspondantes après un changement quelconque de variables. De plus, il est aisé de voir que, si dans le système (1) on change a en αa, b en βb, les quantités L sont multipliées par $\alpha^2\beta$, les quantités M par $\alpha\beta^2$, la valeur de $\frac{\lambda}{\mu}$ par $\frac{\beta}{\alpha}$; donc $\lambda L - \mu M$ est multipliée par $\alpha^2\beta^2$; donc le système (32) ne change pas. Si, enfin, on change a en $a+b$, M ne change pas; L se change en $L - M$, $\frac{\mu}{\lambda}$ en $\frac{\mu}{\lambda} - 1$; donc $\lambda L - \mu M$ devient

$$\lambda(L - M) - M(\mu - \lambda) = \lambda L - \mu M,$$

c'est-à-dire ne change pas.

Si donc on fait un changement quelconque de variables et si l'on remplace les équations (1) par un système équivalent, les équations (32) se changent en un système équivalent.

Cela posé, supposons qu'elles aient trois racines communes et ramenons le système à la forme (16), et supposons que la première des équations (16) soit réductible à la forme

$$dz_3 - z_4 dz_1 - z_5 dz_2 = 0,$$

la seconde étant devenue

$$c_1 dz_1 + c_2 dz_2 + c_4 dz_4 + c_5 dz_5 = 0,$$

les équations (20) sont

$$\begin{gathered}
-\Delta_4 = -\gamma z_4 + \delta c_1,\\
-\Delta_5 = -\gamma z_5 + \delta c_2,\\
0 = \gamma,\\
\Delta_1 = \delta c_4,\\
\Delta_2 = \delta c_5,\\
-z_4\Delta_1 - z_5\Delta_2 + \Delta_3 = 0,\\
c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2 + c_4\Delta_4 + c_5\Delta_5 = 0.
\end{gathered}$$

On en tire

$$\gamma = 0, \quad \Delta_1 = \delta c_4, \quad \Delta_2 = \delta c_5, \quad \Delta_4 = -\delta c_1,$$
$$\Delta_5 = -\delta c_2, \quad \Delta_3 = \delta(c_4 z_4 + c_5 z_5).$$

On a donc les deux systèmes distincts

$$\Delta_1 = c_4, \quad \Delta_2 = c_5, \quad \Delta_3 = c_4 z_4 + c_5 z_5,$$
$$\Delta_4 = -c_1, \quad \Delta_5 = -c_2, \quad \Delta_6 = 0;$$
$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0, \quad \Delta_6 = 1,$$

et les équations (32) deviennent

$$c_4 \frac{dF}{dz_1} + c_5 \frac{dF}{dz_2} + (c_4 z_4 + c_5 z_5)\frac{dF}{dz_3} - c_1 \frac{dF}{dz_4} - c_2 \frac{dF}{dz_5} = 0, \qquad \frac{dF}{dz_6} = 0.$$

Supposons qu'elles aient trois solutions communes. On aura, les fonctions F_1, F_2, F_3 ne contenant pas z_6, les équations

$$c_4\left(\frac{dF_1}{dz_1} + z_4 \frac{dF_1}{dz_3}\right) + c_5\left(\frac{dF_1}{dz_2} + z_5 \frac{dF_1}{dz_3}\right) - c_1 \frac{dF_1}{dz_4} - c_2 \frac{dF_1}{dz_5} = 0,$$
$$c_4\left(\frac{dF_2}{dz_1} + z_4 \frac{dF_2}{dz_3}\right) + c_5\left(\frac{dF_2}{dz_2} + z_5 \frac{dF_2}{dz_3}\right) - c_1 \frac{dF_2}{dz_4} - c_2 \frac{dF_2}{dz_5} = 0,$$
$$c_4\left(\frac{dF_3}{dz_1} + z_4 \frac{dF_3}{dz_3}\right) + c_5\left(\frac{dF_3}{dz_2} + z_5 \frac{dF_3}{dz_3}\right) - c_1 \frac{dF_3}{dz_4} - c_2 \frac{dF_3}{dz_5} = 0.$$

On voit que l'on en tirerait, pour les valeurs des rapports de trois des quantités c_1, c_2, c_4, c_5, des valeurs indépendantes de z_6, auquel cas la proposition que l'on a en vue est démontrée, à moins que tous les déterminants du Tableau suivant soient nuls :

$$\left|\begin{array}{cccc}
-z_4 & \frac{dF_1}{dz_1} & \frac{dF_2}{dz_1} & \frac{dF_3}{dz_1} \\
-z_5 & \frac{dF_1}{dz_2} & \frac{dF_2}{dz_2} & \frac{dF_3}{dz_2} \\
1 & \frac{dF_1}{dz_3} & \frac{dF_2}{dz_3} & \frac{dF_3}{dz_3} \\
0 & \frac{dF_1}{dz_4} & \frac{dF_2}{dz_4} & \frac{dF_3}{dz_4} \\
0 & \frac{dF_1}{dz_5} & \frac{dF_2}{dz_5} & \frac{dF_3}{dz_5}
\end{array}\right|.$$

Dans ce cas, on peut, par un changement de variables effectué sur les variables z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, mettre l'équation

$$dz_3 - z_4 dz_1 - z_5 dz_2 = 0$$

sous la forme

$$dF_3 - F_4 dF_1 - F_5 dF_2 = 0$$

et l'équation

$$e_1 dz_1 + e_2 dz_2 + e_4 dz_4 + e_5 dz_5 = 0$$

devient

$$e_1 dF_1 + e_2 dF_2 + e_4 dF_4 + e_5 dF_5 = 0.$$

Le système (32) devient

$$e_1 \frac{dF}{dF_1} + e_5 \frac{dF}{dF_2} + (e_1 F_4 + e_5 F_5) \frac{dF}{dF_3} - e_1 \frac{dF}{dF_4} - e_2 \frac{dF}{dF_5} = 0,$$

$$\frac{dF}{dz_6} = 0.$$

Il admet comme solutions

$$F = F_1, \qquad F = F_2, \qquad F = F_3.$$

On aura donc

$$e_4 = 0, \qquad e_5 = 0,$$

et la seconde des équations du système devient

$$e_1 dF_1 + e_2 dF_2 = 0.$$

ce qui démontre la proposition que l'on avait en vue. Ainsi, quand les équations (32) ont trois solutions communes, il existe toujours une combinaison des équations du système (1) réductible à la forme

$$dF_2 - F_3 dF_1 = 0.$$

C'est le cas particulier (VIII). Le système est réductible à la forme

(VIII) $\quad dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad e_1 dy_1 + e_3 dy_3 + e_4 dy_4 + e_5 dy_5 = 0.$

Mais il se peut que cette réduction soit possible pour les deux racines

de l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$. Alors on a le cas particulier (VII)

$$\text{(VII)} \qquad dy_2 - y_3\,dy_1 = 0, \qquad dy_5 - y_6\,dy_4 = 0.$$

Enfin, il reste alors le cas général où le système est réductible à la forme (IX)

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} dy_3 - y_4\,dy_1 - y_5\,dy_2 = 0, \\ c_1\,dy_1 + c_2\,dy_2 + c_4\,dy_4 + c_5\,dy_5 = 0. \end{cases}$$

6. Je vais maintenant m'occuper des solutions du système (1) dans ces différents cas.

Dans le cas (I) les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = c',$$

c et c' désignant des constantes arbitraires, donnent la solution du système, quel que soit le nombre des variables indépendantes qui peut aller jusqu'à quatre.

Dans le cas (II) les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = f(\alpha), \qquad y_4 = f'(\alpha)$$

donnent la solution du système, c étant une constante arbitraire, α une variable indépendante, $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de cette variable, $f'(\alpha)$ sa dérivée première. Le nombre des variables arbitraires peut aller jusqu'à trois.

Dans le cas (III) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha), \qquad y_4 = f''(\alpha)$$

donnent la solution du système, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de cette variable, $f'(\alpha)$ sa dérivée première, $f''(\alpha)$ sa dérivée seconde. Le nombre des variables indépendantes peut encore être de trois.

Dans le cas (IV) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha), \qquad y_4 = \varphi(\alpha), \qquad y_5 = \varphi'(\alpha)$$

donnent la solution du problème, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ leurs dérivées dans le cas d'une ou deux variables indépendantes. Dans le cas de trois, les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = c', \qquad y_3 = c''$$

donnent la solution de la question, c, c', c'' étant trois constantes arbitraires.

Dans le cas (V) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi(\alpha), \qquad f''(\alpha) - A - B\varphi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du problème, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$ les dérivées première et seconde de $f(\alpha)$ et la dérivée première de $\varphi(\alpha)$, le nombre des variables indépendantes étant d'une ou deux. Il ne peut plus y avoir que des solutions singulières dans le cas de trois variables indépendantes.

Dans le cas (VI) les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = f(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi(\alpha), \qquad \varphi'(\alpha) - y_5 - y_6 f'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du système dans le cas d'une variable indépendante, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$ leurs dérivées, c une constante arbitraire.

Dans le cas de deux variables indépendantes, les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = \beta, \qquad y_4 = f(\alpha, \beta),$$
$$y_5 = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad y_6 = \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

donnent la solution du système, $f(\alpha, \beta)$ étant une fonction arbitraire

des deux variables indépendantes α et β, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ ses dérivées partielles par rapport à α et à β.

Dans le cas (VII) les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \varphi(\alpha),$$
$$y_5 = \psi(\alpha), \quad \psi'(\alpha) - y_6 \varphi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du système dans le cas d'une variable indépendante, α étant une variable arbitraire, $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ trois fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ leurs dérivées.

Dans le cas de deux variables indépendantes, les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \beta,$$
$$y_5 = \varphi(\beta), \quad y_6 = \varphi'(\beta)$$

donnent la solution du problème, α et β étant les deux variables indépendantes, $f(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ deux fonctions arbitraires, la première de α, la seconde de β, $f'(\alpha)$ et $\varphi'(\beta)$ leurs dérivées.

Dans le cas (VIII) les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \varphi(\alpha), \quad y_5 = \psi(\alpha),$$
$$c_1 + c_3 f''(\alpha) + c_4 \varphi'(\alpha) + c_5 \psi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution du système dans le cas d'une variable indépendante, $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ étant trois fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ les dérivées première et seconde de $f(\alpha)$ et les dérivées premières de $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$.

Dans le cas de deux variables indépendantes on ne peut plus comprendre dans un même système de formules toutes les solutions; mais reprenons les formules

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha),$$
$$c_1\, d\alpha + c_3 f''(\alpha)\, d\alpha + c_4\, dy_4 + c_5\, dy_5 = 0;$$

si l'on précise la fonction $f(\alpha)$, on est ramené à une équation de la

forme

$$A_1 dz_1 + A_2 dz_2 + A_3 dz_3 + A_4 dz_4 = 0,$$

les variables z_1, z_2, z_3, z_4 étant α, y_4, y_5, y_6; le terme A_3 manquerait. On sait que l'on peut comprendre toutes les solutions de cette équation dans des formules de la forme

$$F_1(\alpha, y_4, y_5, y_6) = \beta, \qquad F_2 = \varphi(\beta), \qquad F_3 = \varphi'(\beta).$$

On en tirerait trois des quantités α, y_4, y_5, y_6 en fonction de β et de l'une d'entre elles, $\varphi(\beta)$ étant une fonction arbitraire de β, $\varphi'(\beta)$ sa dérivée.

Dans le cas général (IX) les formules

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = \varphi(\alpha), \qquad y_5 = \psi(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi'(\alpha) - \psi(\alpha) f'(\alpha),$$
$$c_1 - c_2 f'(\alpha) + c_4[\varphi''(\alpha) - \psi'(\alpha) f'(\alpha) - \psi(\alpha) f''(\alpha)] + c_5 \psi'(\alpha) = 0$$

donnent la solution de la question dans le cas d'une variable indépendante, α désignant une variable arbitraire, $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ trois fonctions arbitraires de cette variable, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ étant les dérivées première et seconde de $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ et la dérivée première de $\psi(\alpha)$.

Presque toutes les propositions précédentes sont immédiates. Il n'y a qu'à faire voir que seulement dans le cas (I) le système (1) a des solutions en prenant quatre variables indépendantes et seulement dans les cas (I), (II), (III), (IV), le système (1) a des solutions en prenant trois variables indépendantes.

Nous considérons pour cela qu'un système de solutions des équations (1) forme une intégrale singulière quand on ne peut prendre arbitrairement les valeurs initiales des six quantités $x_1, \ldots, x_6$ et nous écarterons ce cas.

Dès lors, un système de solutions des équations (1) à quatre variables indépendantes devra renfermer deux constantes arbitraires. Soient

$$F_1(x_1, \ldots, x_6) = c,$$
$$F_2(x_1, \ldots, x_6) = c'$$

les équations définissant ce système résolues par rapport aux constantes c, c'. Les équations

$$\sum \frac{dF_1}{dx}\,dx = 0, \qquad \sum \frac{dF_2}{dx}\,dx = 0$$

devront donc être satisfaites en même temps que (1), quelles que soient $x_1, \ldots, x_6$; donc elles rentreront dans (1) et l'on est bien dans le cas (I).

De même un système de solutions à trois variables indépendantes devra renfermer trois constantes arbitraires. Soient

$$F_1(x_1, \ldots, x_6) = c,$$
$$F_2(x_1, \ldots, x_6) = c',$$
$$F_3(x_1, \ldots, x_6) = c''$$

ces équations. Les équations

$$\sum \frac{dF_1}{dx}\,dx = 0, \qquad \sum \frac{dF_2}{dx}\,dx = 0, \qquad \sum \frac{dF_3}{dx}\,dx = 0$$

devront renfermer le système (1) et par suite on se trouve dans le cas (IV) renfermant comme cas particuliers (I), (II), (III).

7. Il nous reste maintenant à nous occuper de la recherche des solutions du système (1) dans le cas général, lorsque le nombre des variables indépendantes est de deux. C'est la question dont nous allons parler.

Reprenons les équations (2), (3); (4), (5) qui en sont la conséquence et cherchons à satisfaire en outre aux équations

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha_1 \dfrac{d\omega_1}{dF_1} + \alpha_2 \dfrac{d\omega_2}{dF_1} + \alpha_3 \dfrac{d\omega_3}{dF_1} + \alpha_4 \dfrac{d\omega_4}{dF_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_5 = \alpha_1 \dfrac{d\omega_1}{dF_5} + \alpha_2 \dfrac{d\omega_2}{dF_5} + \alpha_3 \dfrac{d\omega_3}{dF_5} + \alpha_4 \dfrac{d\omega_4}{dF_5}, \end{array} \right.$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \beta_1 \dfrac{d\omega_1}{dF_1} + \beta_2 \dfrac{d\omega_2}{dF_1} + \beta_3 \dfrac{d\omega_3}{dF_1} + \beta_4 \dfrac{d\omega_4}{dF_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_5 = \beta_1 \dfrac{d\omega_1}{dF_5} + \beta_2 \dfrac{d\omega_2}{dF_5} + \beta_3 \dfrac{d\omega_3}{dF_5} + \beta_4 \dfrac{d\omega_4}{dF_5}, \end{array} \right.$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ étant des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 seulement. On voit que, si l'on peut satisfaire à ces équations, les équations (2), et (3) deviennent

$$a = \alpha_1 \frac{d\omega_1}{dx} + \alpha_2 \frac{d\omega_2}{dx} + \alpha_3 \frac{d\omega_3}{dx} + \alpha_4 \frac{d\omega_4}{dx},$$

$$b = \beta_1 \frac{d\omega_1}{dx} + \beta_2 \frac{d\omega_2}{dx} + \beta_3 \frac{d\omega_3}{dx} + \beta_4 \frac{d\omega_4}{dx}$$

et le système différentiel (1) est mis sous la forme

$$\alpha_1 d\omega_1 + \alpha_2 d\omega_2 + \alpha_3 d\omega_3 + \alpha_4 d\omega_4 = 0,$$

$$\beta_1 d\omega_1 + \beta_2 d\omega_2 + \beta_3 d\omega_3 + \beta_4 d\omega_4 = 0.$$

Il est satisfait en posant

$$\omega_1 = C_1, \qquad \omega_2 = C_2, \qquad \omega_3 = C_3, \qquad \omega_4 = C_4,$$

C_1, C_2, C_3, C_4 étant des constantes. Les équations précédentes fournissent quatre des quantités x comme fonctions des deux autres et de quatre constantes arbitraires. On a un système d'intégrales des équations différentielles proposées dans le cas de deux variables indépendantes renfermant quatre constantes arbitraires. Je vais chercher à former de tels systèmes [1].

Pour que les équations (33) et (34) soient satisfaites, il faut en somme satisfaire à des équations de la forme

$$(35) \qquad \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4 + \lambda_5 H_5 = 0,$$

$$(36) \qquad \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 + \mu_5 H_5 = 0,$$

H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 étant proportionnelles à des fonctions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 seulement. Les fonctions $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sont alors quatre solutions distinctes de l'équation

$$H_1 \frac{d\omega}{dF_1} + H_2 \frac{d\omega}{dF_2} + H_3 \frac{d\omega}{dF_3} + H_4 \frac{d\omega}{dF_4} + H_5 \frac{d\omega}{dF_5} = 0;$$

---

[1] On peut consulter sur cette manière de transformer en général un système d'équations de Pfaff le savant Mémoire de Biermann : *Ueber n simultane differential Gleichungen der Form* $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ (*Schlöm. Zeitschrift*. t. XXX, 1885, p. 234-244.

supposons, par exemple, $H_1 \neq 0$ et posons

$$\frac{H_2}{H_1} = X_2, \quad \frac{H_3}{H_1} = X_3, \quad \frac{H_4}{H_1} = X_4, \quad \frac{H_5}{H_1} = X_5;$$

les équations (35) et (36) deviennent

$$(37) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5 = 0,$$

$$(38) \qquad \mu_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \mu_4 X_4 + \mu_5 X_5 = 0.$$

On en tire

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\,(\lambda_1) + \Delta\,(\lambda_2)X_2 + \Delta\,(\lambda_3)X_3 + \Delta\,(\lambda_4)X_4 + \Delta\,(\lambda_5)X_5 = 0, \\ \Delta^2(\lambda_1) + \Delta^2(\lambda_2)X_2 + \Delta^2(\lambda_3)X_3 + \Delta^2(\lambda_4)X_4 + \Delta^2(\lambda_5)X_5 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\,(\mu_1) + \Delta\,(\mu_2)X_2 + \Delta\,(\mu_3)X_3 + \Delta\,(\mu_4)X_4 + \Delta\,(\mu_5)X_5 = 0, \\ \Delta^2(\mu_1) + \Delta^2(\mu_2)X_2 + \Delta^2(\mu_3)X_3 + \Delta^2(\mu_4)X_4 + \Delta^2(\mu_5)X_5 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Cela posé, adjoignons aux équations (2) et (3) les suivantes :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda\Delta(\lambda_1) + \mu\Delta(\mu_1) + \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 = 0, \\ \lambda\Delta(\lambda_2) + \mu\Delta(\mu_2) + \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda\Delta(\lambda_5) + \mu\Delta(\mu_5) + \alpha\lambda_5 + \beta\mu_5 = 0. \end{array} \right.$$

Alors, si par exemple μ est différent de zéro, le système (40) rentre dans (37), (38) et (39). Déterminons alors X_2, X_3, X_4, X_5 par les équations (37), (38) et les deux premières de (39). De la première de (39) et de (37) on tire

$$(42) \qquad \lambda_2\Delta(X_2) + \lambda_3\Delta(X_3) + \lambda_4\Delta(X_4) + \lambda_5\Delta(X_5) = 0;$$

de (38) et de la première de (40) on tire

$$(43) \qquad \mu_2\Delta(X_2) + \mu_3\Delta(X_3) + \mu_4\Delta(X_4) + \mu_5\Delta(X_5) = 0;$$

des deux premières de (39) on tire

$$(44)\quad \Delta(\lambda_2)\Delta(X_2)+\Delta(\lambda_3)\Delta(X_3)+\Delta(\lambda_4)\Delta(X_4)+\Delta(\lambda_5)\Delta(X_5)=0,$$

et l'on voit que, si X_2, X_3, X_4, X_5 satisfaisaient à la troisième des équations (39), on aurait

$$(45)\quad \Delta^2(\lambda_2)\Delta(X_2)+\Delta^2(\lambda_3)\Delta(X_3)+\Delta^2(\lambda_4)\Delta(X_4)+\Delta^2(\lambda_5)\Delta(X_5)=0,$$

et les équations (42), (43), (44), (45) montreraient que l'on a

$$\Delta(X_2)=0,\qquad \Delta(X_3)=0,\qquad \Delta(X_4)=0,\qquad \Delta(X_5)=0,$$

si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Or, pour que la troisième des équations (39) rentre dans (37), (38) et les deux premières de (39), il faut et il suffit que l'on ait l'équation suivante

$$(46)\quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \\ \Delta^3(\lambda_1) & \Delta^3(\lambda_2) & \Delta^3(\lambda_3) & \Delta^3(\lambda_4) & \Delta^3(\lambda_5) \end{vmatrix}=0.$$

On voit en somme que, si tous les déterminants obtenus en prenant quatre colonnes dans les quatre premières lignes du déterminant de l'équation (46) ne sont pas nuls, cette équation (46) sera la condition pour que l'on puisse déterminer des quantités H_1, H_2, H_3,

H_4, H_5 dont les rapports à l'une d'entre elles soient fonctions seulement de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 satisfaisant aux équations (35) et (36).

Ces quantités sont alors déterminées par les équations

$$(47)\quad \begin{cases} \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4 + \lambda_5 H_5 = 0, \\ \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 + \mu_5 H_5 = 0, \\ \Delta\,(\lambda_1) H_1 + \Delta\,(\lambda_2) H_2 + \Delta\,(\lambda_3) H_3 + \Delta\,(\lambda_4) H_4 + \Delta\,(\lambda_5) H_5 = 0, \\ \Delta^2(\lambda_1) H_1 + \Delta^2(\lambda_2) H_2 + \Delta^2(\lambda_3) H_3 + \Delta^2(\lambda_4) H_4 + \Delta^2(\lambda_5) H_5 = 0. \end{cases}$$

Nous avons en somme à résoudre le système des équations (2), (3) d'où résultent (4), (5), puis (41) et (46). On a comme inconnues

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4, & \lambda_5, \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4, & \mu_5, \\ F_1, & F_2, & F_3, & F_4, & F_5, \\ & \lambda, & \mu, & \alpha, & \beta; \end{matrix}$$

les quatre dernières inconnues se réduisant à trois, on a en tout dix-huit fonctions inconnues et pour les déterminer douze équations (2) et (3), cinq équations (41) et une équation (46).

Cherchons à résoudre ce système.

Multiplions la première des équations (41) par $\frac{dF_1}{dx_i}$, la seconde par $\frac{dF_2}{dx_i}$, ..., la cinquième par $\frac{dF_5}{dx_i}$ et ajoutons; il viendra, en vertu de (6) et (7),

$$(48)\quad \Delta_1(\lambda a_{i1} + \mu b_{i1}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{i6} + \mu b_{i6}) + \alpha a_i + \beta b_i = 0,$$

équation qui en contient six. Joignons-y les équations (4) et (5). On a le système

$$\begin{aligned} &\Delta_1(\lambda a_{11} + \mu b_{11}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{16} + \mu b_{16}) + \alpha a_1 + \beta b_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\Delta_1(\lambda a_{61} + \mu b_{61}) + \ldots + \Delta_6(\lambda a_{66} + \mu b_{66}) + \alpha a_6 + \beta b_6 = 0, \\ &\quad - a_1 \Delta_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a_6 \Delta_6 = 0, \\ &\quad - b_1 \Delta_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - b_6 \Delta_6 = 0; \end{aligned}$$

on a huit équations homogènes à huit inconnues qui ne sont autres que les équations (20) où $-\gamma$ et $-\delta$ sont remplacés par α et β.

On aura donc l'équation (11) qui donnera deux valeurs pour le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. Les équations se réduisent alors à six distinctes et l'on a les formules (27) pour deux systèmes de valeurs de $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$.

Pour la première racine en $\frac{\lambda}{\mu}$ on aura le système

$$A_1 + \omega B_1, \qquad A_2 + \omega B_2, \qquad \ldots, \qquad A_6 + \omega B_6,$$

ω étant arbitraire, et pour la seconde racine le système

$$C_1 + \omega' D_1, \qquad C_2 + \omega' D_2, \qquad \ldots, \qquad C_6 + \omega' D_6,$$

ω' étant arbitraire. Remarquons que l'on a les identités

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_6 A_6 = 0, && a_1 C_1 + a_2 C_2 + \ldots + a_6 C_6 = 0, \\ & b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots + b_6 A_6 = 0, && b_1 C_1 + b_2 C_2 + \ldots + b_6 C_6 = 0, \\ & a_1 B_1 + a_2 B_2 + \ldots + a_6 B_6 = 0, && a_1 D_1 + a_2 D_2 + \ldots + a_6 D_6 = 0, \\ & b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots + b_6 B_6 = 0, && b_1 D_1 + b_2 D_2 + \ldots + b_6 D_6 = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est aisé de voir que si l'on pouvait déterminer ω et ω' de façon que les équations

$$\sum (A + \omega B) \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$\sum (C + \omega' D) \frac{dF}{dx} = 0,$$

aient quatre solutions communes, la question serait résolue, car les équations

$$X_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_1}{dx_6} = 0,$$

$$X_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_2}{dx_6} = 0,$$

$$X_1 \frac{d\omega_3}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_3}{dx_6} = 0,$$

$$X_1 \frac{d\omega_4}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_4}{dx_6} = 0,$$

$$X_1\, a_1 + \ldots + X_6\, a_6 = 0,$$

où ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 désignent ces quatre solutions communes et X_1, ..., X_6 des inconnues, sont satisfaites pour les valeurs $A_1 + \omega B_1$, ..., $A_6 + \omega B_6$ d'une part et $C_1 + \omega' D_1$, ..., $C_6 + \omega' D_6$ d'autre part. Ces deux systèmes sont distincts : sans cela on serait dans le cas particulier où l'équation (11) est identique. Donc dans le Tableau

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\omega_1}{dx_1} & \cdots & \dfrac{d\omega_1}{dx_6} \\ \dfrac{d\omega_2}{dx_1} & \cdots & \dfrac{d\omega_2}{dx_6} \\ \dfrac{d\omega_3}{dx_1} & \cdots & \dfrac{d\omega_3}{dx_6} \\ \dfrac{d\omega_4}{dx_1} & \cdots & \dfrac{d\omega_4}{dx_6} \\ a_1 & \cdots & a_6 \end{vmatrix}$$

tous les déterminants obtenus en supprimant une colonne sont nuls. Il en est de même si l'on remplace les a par les b. On voit donc que l'on retombe sur les équations qui définiraient les fonctions ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

8. Nous verrons plus tard les équations qui lient les quantités ω et ω'; pour le moment nous allons faire voir que l'on obtient de nouveaux cas d'intégration lorsque les équations

$$\sum A \frac{dF}{dx} = 0, \qquad \sum B \frac{dF}{dx} = 0,$$

qui ne sont autres que les équations (32), ont une ou deux solutions communes.

Soit, en effet, F_3 une solution commune des équations précédentes. Le système (1) étant supposé ramené à la forme (16)

$$A_1 dy_1 + A_2 dy_2 + A_3 dy_3 + A_4 dy_4 + A_5 dy_5 = 0,$$
$$B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + B_3 dy_3 + B_4 dy_4 + B_5 dy_5 = 0,$$

où les A sont seulement fonctions de y_1, ..., y_5; la fonction F_3 sera une fonction de y_1, ..., y_5.

On peut toujours ramener la première de ces équations à la forme

$$dF_3 - F_4\, dF_1 - F_5\, dF_2 = 0.$$

On aurait à satisfaire aux équations

$$\lambda A = \frac{dF_3}{dy} - F_4 \frac{dF_1}{dy} - F_5 \frac{dF_2}{dy}.$$

Or nous avons vu (voir *Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. V, Mémoire sur les équations différentielles, Chap. IV) que l'on peut résoudre ces équations en prenant arbitrairement λ et qu'alors F_3 est une solution qui peut être quelconque d'une équation

$$\Delta'_1 \frac{dF}{dy_1} + \ldots + \Delta'_5 \frac{dF}{dy_5} = H,$$

où les quantités Δ contiennent λ et ses dérivées premières. Il suffira donc de déterminer λ de façon à satisfaire à l'équation précédente, F ayant la valeur F_3. Le système (16) se ramènera à la forme

$$(50) \qquad \begin{cases} dz_3 - z_4\, dz_1 - z_5\, dz_2 = 0, \\ c_1\, dz_1 + c_2\, dz_2 + c_4\, dz_4 + c_5\, dz_5 = 0, \end{cases}$$

en désignant F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 par z_1, z_2, z_3, z_4, z_5. Nous avons vu que dans ce cas les équations (32) deviennent

$$c_4 \frac{dF}{dz_1} + c_5 \frac{dF}{dz_2} + (c_4 z_4 + c_5 z_5) \frac{dF}{dz_3} - c_1 \frac{dF}{dz_4} - c_2 \frac{dF}{dz_5} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz_6} = 0.$$

Ces équations doivent admettre la solution commune

$$F = z_3.$$

On devra donc avoir

$$c_4 z_4 + c_5 z_5 = 0.$$

On peut prendre

$$c_4 = - z_5, \qquad c_5 = z_4,$$

et les équations (50) deviennent

$$dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0,$$
$$c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + z_1\,dz_5 - z_5\,dz_4 = 0.$$

Elles sont évidemment satisfaites en posant

$$z_3 = C, \qquad z_2 = f(z_1), \qquad \frac{z_4}{z_5} = -f'(z_1),$$
$$c_1 + c_2 f'(z_1) - z_5^2 f''(z_1) = 0.$$

On tire de la dernière z_5 et l'on a bien un système de solutions à deux variables indépendantes dont l'une est z_6 renfermant une constante et une fonction arbitraire.

Dans la pratique, les équations (32) ayant une solution commune F_3, on posera

$$F_3 = C;$$

on tirera de cette équation la valeur de l'une des quantités x. Le système (1) se transformera alors en un système de deux équations de même forme à cinq variables arbitraires. Se rapportant au Mémoire précité (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. V, n° 1, Chap. V), on sera dans le cas où ce système admet un système de solutions renfermant une fonction arbitraire, quel que soit C. Ce cas d'intégration paraît être nouveau.

Cela posé, étudions le cas où les équations (32) ont deux solutions communes distinctes. Dans ce cas, on voit que, si l'on désigne par F_1 et F_2 ces deux solutions, on peut trouver un système renfermant une fonction arbitraire en posant

$$F_2 = f(F_1),$$

f étant une fonction arbitraire. Posons alors

$$F_1 = \alpha, \qquad F_2 = f(\alpha).$$

De ces équations nous tirerons deux des quantités x en fonction des

autres et de α. Nous préciserons la fonction $f(\alpha)$ et le système (1) se transformera en un système de deux équations à cinq variables (Mémoire précité, Chap. V), qui aura un système de solutions renfermant une fonction arbitraire.

Je dis que ce procédé donne toutes les solutions du système (1). En effet, nous avons vu que si les équations

$$\omega_1 = C_1, \qquad \omega_2 = C_2, \qquad \omega_3 = C_3, \qquad \omega_4 = C_4$$

représentent un système de solutions renfermant quatre constantes arbitraires, les fonctions ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont des solutions de l'équation

$$\sum A\frac{dF}{dx} + \omega\sum B\frac{dF}{dx} = 0,$$

ω étant convenablement choisie. Soient alors trois solutions Φ_1, Φ_2, Φ_3 formant avec F_1 et F_2 un système distinct; on aura

$$\omega_1 = f_1(F_1, F_2, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \qquad \omega_2 = f_2, \qquad \omega_3 = f_3, \qquad \omega_4 = f_4,$$

et les équations

$$\omega_1 = C_1, \qquad \omega_2 = C_2, \qquad \omega_3 = C_3, \qquad \omega_4 = C_4$$

donnent, en éliminant Φ_1, Φ_2, Φ_3, une équation de la forme

$$H(F_1, F_2, C_1, C_2, C_3, C_4) = 0,$$

ce qui montre bien que F_2 est une fonction de F_1.

On peut donner de cette proposition une autre démonstration qui fait voir plus clairement le résultat précédent.

Ramenons, comme dans le cas où les équations (32) ont une solution commune, le système à la forme

$$dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0,$$
$$c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + z_5\,dz_4 - z_4\,dz_5 = 0.$$

Les coefficients c_1, c_2 qui contiennent z_6 seront liés par la relation

$$z_5\frac{dF}{dz_1} - z_4\frac{dF}{dz_2} - c_1\frac{dF}{dz_4} - c_2\frac{dF}{dz_5} = 0,$$

F étant la seconde solution commune des équations (32) et, par suite, ne contenant pas z_6.

On satisfera à l'équation

$$dz_3 - z_4\,dz_1 - z_5\,dz_2 = 0,$$

en prenant pour z_3 une fonction quelconque de z_1 et z_2 et posant

$$z_4 = \frac{dz_3}{dz_1}, \qquad z_5 = \frac{dz_3}{dz_2}.$$

L'équation

$$c_1\,dz_1 + c_2\,dz_2 + z_5\,dz_4 - z_4\,dz_5 = 0$$

donne alors

$$c_1 + z_5\frac{dz_4}{dz_1} - z_4\frac{dz_5}{dz_1} = 0,$$

$$c_2 + z_5\frac{dz_4}{dz_2} - z_4\frac{dz_5}{dz_2} = 0;$$

multiplions la première de ces équations par $\frac{dF}{dz_4}$, la seconde par $\frac{dF}{dz_5}$ et ajoutons; on aura

$$z_5\frac{dF}{dz_1} - z_4\frac{dF}{dz_2} + \frac{dF}{dz_4}\left(z_5\frac{dz_4}{dz_1} - z_4\frac{dz_5}{dz_1}\right) + \frac{dF}{dz_5}\left(z_5\frac{dz_4}{dz_2} - z_4\frac{dz_5}{dz_2}\right) = 0,$$

ou bien

$$z_5\left(\frac{dF}{dz_1} + \frac{dF}{dz_3}\frac{dz_3}{dz_1} + \frac{dF}{dz_4}\frac{dz_4}{dz_1} + \frac{dF}{dz_5}\frac{dz_5}{dz_1}\right)$$
$$= z_4\left(\frac{dF}{dz_2} + \frac{dF}{dz_3}\frac{dz_3}{dz_2} + \frac{dF}{dz_4}\frac{dz_4}{dz_2} + \frac{dF}{dz_5}\frac{dz_5}{dz_2}\right).$$

Cette équation montre que F est une fonction de z_3.

Le système proposé pourra dès lors être remplacé par le suivant :

$$z_4 = \frac{dz_3}{dz_1}, \qquad z_5 = \frac{dz_3}{dz_2}, \qquad F(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = f(z_3),$$

et l'une des deux équations

$$c_1 + z_5\frac{dz_4}{dz_1} - z_4\frac{dz_5}{dz_1} = 0, \qquad c_2 + z_5\frac{dz_4}{dz_2} - z_4\frac{dz_5}{dz_2} = 0.$$

De l'une des deux dernières on tirera z_6; on satisfera aux premières, en précisant la fonction $f(z_3)$, par des formules

$$\Phi(z_1, z_2, z_3, \beta) = \varphi(\beta), \qquad \frac{d\Phi}{d\beta} = \varphi'(\beta).$$

On peut donc dans ce cas obtenir toutes les solutions du système (1) par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

9. Revenons maintenant au cas général.

Il nous reste à former l'équation (46). On peut la mettre sous la forme

$$\Delta^3(\lambda) = a\Delta^2(\lambda) + b\Delta(\lambda) + c\mu + d\lambda,$$

λ désignant l'une des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ et a, b, c, d des fonctions convenables. Multiplions-la par $\frac{dF}{dx}$ et ajoutons les cinq équations ainsi obtenues, λ et F ayant successivement les indices 1, 2, ..., 5. On aura

$$\sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx} = a\sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx} + b\sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx} + c\sum \mu\frac{dF}{dx} + d\sum \lambda\frac{dF}{dx},$$

où le signe Σ porte sur les quantités λ, μ et F. On aura six équations semblables en donnant successivement à la lettre x les indices 1, 2, ..., 6 et l'on voit que l'on a à annuler tous les déterminants du Tableau

$$(51)\quad \left\| \begin{matrix} \sum \lambda\frac{dF}{dx_1} & \sum \mu\frac{dF}{dx_1} & \sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_1} & \sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx_1} & \sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx_1} \\ \sum \lambda\frac{dF}{dx_2} & \sum \mu\frac{dF}{dx_2} & \sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_2} & \sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx_2} & \sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum \lambda\frac{dF}{dx_6} & \sum \mu\frac{dF}{dx_6} & \sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_6} & \sum \Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx_6} & \sum \Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx_6} \end{matrix} \right\|$$

qui se réduisent à une seule équation.

On a

$$\sum \lambda\frac{dF}{dx_i} = a_i, \qquad \sum \mu\frac{dF}{dx_i} = b_i.$$

puis

$$\sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_i} = \Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \ldots + \Delta_6 a_{i6},$$

où

$$\Delta_1 = A_1 + \omega B_1, \qquad \ldots, \qquad \Delta_6 = A_6 + \omega B_6.$$

en se servant d'une des racines de l'équation (11) en $\frac{\lambda}{\mu}$ et, par suite, on aura

$$(52) \qquad \sum \Delta(\lambda)\frac{dF}{dx_i} = R_i + \omega S_i.$$

Remarquons que l'on a identiquement

$$\Sigma(A + \omega B)(R + \omega S) = 0,$$

c'est-à-dire séparément

$$\Sigma AR = 0, \qquad \Sigma BS = 0, \qquad \Sigma(AS + BR) = 0.$$

Remarquons encore que, dans le cas où l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a ses racines distinctes, on aurait en multipliant l'équation (52) par $C_i + \omega' D_i$ et ajoutant en donnant à i les valeurs 1, 2, ..., 6, la formule

$$\Sigma(C + \omega' D)(R + \omega S) = 0.$$

Cette équation est une identité et ne donne aucune relation entre ω et ω'.

En effet, désignons pour abréger $C + \omega' D$ par Δ'. Soient λ_1 et μ_1 les valeurs de λ et μ pour le système $\Delta = A + \omega B$, et λ_2 et μ_2 les valeurs de λ et μ pour le système Δ'. Si l'on multiplie les équations (48) où λ et μ sont remplacés par λ_1 et μ_1 par $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_6$ et que l'on ajoute, il viendra

$$\lambda_1 \Sigma a_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) + \mu_1 \Sigma b_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0.$$

De même si, dans ces équations (48), l'on remplace les Δ par Δ' et λ et μ par λ_2 et μ_2, puis qu'on les multiplie par Δ et qu'on ajoute, il vient

$$\lambda_2 \Sigma a_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) + \mu_2 \Sigma b_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0.$$

On aura donc séparément

$$\Sigma a_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0, \qquad \Sigma b_{ij}(\Delta'_i \Delta_j - \Delta'_j \Delta_i) = 0;$$

la première de ces équations peut s'écrire

$$\Sigma(R + \omega S)(C + \omega' D) = 0,$$

qui a donc bien lieu quels que soient ω et ω'. On aura séparément

$$\Sigma RC = 0, \qquad \Sigma RD = 0, \qquad \Sigma SC = 0, \qquad \Sigma SD = 0.$$

On voit que, si l'on fait tendre la seconde racine de l'équation (11) vers la première, on a alors au lieu de la relation

$$\Sigma(AS + BR) = 0,$$

séparément

$$\Sigma AS = 0, \qquad \Sigma BR = 0.$$

Inversement, je dis que, si l'on a

$$\Sigma AS = 0,$$

l'équation a une racine double. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. On aurait les relations

$$\Sigma XR = 0, \qquad \Sigma XS = 0,$$

qui seraient satisfaites pour les valeurs A, B, C, D données aux quantités X. Les systèmes A, B, C, D ne seraient donc pas distincts et l'on serait alors dans le cas où l'équation est identique, auquel cas la condition d'égalité des racines est bien satisfaite.

Revenons maintenant à la suite de la détermination des coefficients de l'équation (51). Posons pour cela

$$R + \omega S = r.$$

On aura

(52) $$\sum \Delta(\lambda) \frac{dF}{dx} = r.$$

De même que ces équations ont été tirées de

$$a = \sum \lambda \frac{dF}{dx}$$

on en tirera

$$(53) \qquad \sum \Delta^2(\lambda) \frac{dF}{dx_i} = r_{i1}\Delta_1 + \ldots + r_{i6}\Delta_6 = s_i,$$

puis, de ces équations

$$(54) \qquad \sum \Delta^3(\lambda) \frac{dF}{dx_i} = s_{i1}\Delta_1 + \ldots + s_{i6}\Delta_6 = t_i,$$

et l'équation (51) est un des déterminants du Tableau

$$(55) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & r_1 & s_1 & t_1 \\ a_2 & b_2 & r_2 & s_2 & t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_6 & b_6 & r_6 & s_6 & t_6 \end{vmatrix}.$$

Remarquons que l'on a identiquement, c'est-à-dire quel que soit ω,

$$\Sigma s\Delta = 0, \qquad \Sigma t\Delta = 0,$$

les termes se détruisant deux à deux dans ces équations. Comme on avait déjà les relations

$$\Sigma a\Delta = 0, \qquad \Sigma b\Delta = 0, \qquad \Sigma r\Delta = 0,$$

on voit que les équations (55) se réduisent bien à une.

10. Remarquons d'abord que cette équation ne donne la solution cherchée que dans le cas où tous les déterminants du Tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \end{vmatrix}$$

ne sont pas nuls, c'est-à-dire quand tous les déterminants du Tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{matrix} \right\|$$

ne sont pas nuls. Voyons ce qui arrive dans ce cas. On peut alors satisfaire aux équations (37) et (38) en prenant arbitrairement l'une des quantités X_2, X_3, X_4, X_5 comme solution de l'équation $\Delta(F) = 0$, c'est-à-dire que l'on peut prendre arbitrairement l'une des fonctions $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ comme solution de cette équation. Mais il est préférable de présenter de la manière suivante les solutions que l'on obtient dans ce cas. En somme, les déterminants des deux Tableaux suivants sont nuls

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta(\mu_1) & \Delta(\mu_2) & \Delta(\mu_3) & \Delta(\mu_4) & \Delta(\mu_5) \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \end{matrix} \right\|.$$

On aura donc les relations, λ étant l'une des quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$

$$\Delta(\mu) = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\Delta(\lambda), \qquad \Delta^2(\lambda) = \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\Delta(\lambda),$$

on en tire

$$\Delta^3(\lambda) = \alpha''\lambda + \beta''\Delta(\lambda) + \gamma''\Delta^2(\lambda).$$

Donc, tous les déterminants du Tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \Delta(\lambda_1) & \Delta(\lambda_2) & \Delta(\lambda_3) & \Delta(\lambda_4) & \Delta(\lambda_5) \\ \Delta^2(\lambda_1) & \Delta^2(\lambda_2) & \Delta^2(\lambda_3) & \Delta^2(\lambda_4) & \Delta^2(\lambda_5) \\ \Delta^3(\lambda_1) & \Delta^3(\lambda_2) & \Delta^3(\lambda_3) & \Delta^3(\lambda_4) & \Delta^3(\lambda_5) \end{vmatrix}$$

sont nuls.

Prenons par exemple l'un de ces déterminants. On aura

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= m\lambda_1 + n\lambda_2 + p\lambda_3, \\ \Delta(\lambda_4) &= m\Delta(\lambda_1) + n\Delta(\lambda_2) + p\Delta(\lambda_3), \\ \Delta^2(\lambda_4) &= m\Delta^2(\lambda_1) + n\Delta^2(\lambda_2) + p\Delta^2(\lambda_3), \\ \Delta^3(\lambda_4) &= m\Delta^3(\lambda_1) + n\Delta^3(\lambda_2) + p\Delta^3(\lambda_3). \end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$\Delta(m) = 0, \qquad \Delta(n) = 0, \qquad \Delta(p) = 0;$$

on pourra donc, en général, poser

$$\begin{gathered} \lambda_1 = m_1 k_1 + n_1 k_2 + p_1 k_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_5 = m_5 k_1 + n_5 k_2 + p_5 k_3, \end{gathered}$$

les quantités $m_1, n_1, p_1, \ldots, m_5, n_5, p_5$ étant des fonctions seulement de $F_1, F_2, \ldots, F_5$. On a ensuite

$$\begin{gathered} \mu_1 = m_1 h_1 + n_1 h_2 + p_1 h_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_5 = m_5 h_1 + n_5 h_2 + p_5 h_3. \end{gathered}$$

On voit qu'alors le système (1) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} k_1 \sum_1^5 m\,dF + k_2 \sum_1^5 n\,dF + k_3 \sum_1^5 p\,dF = 0, \\ h_1 \sum_1^5 m\,dF + h_2 \sum_1^5 n\,dF + h_3 \sum_1^5 p\,dF = 0. \end{aligned}$$

Elles sont évidemment satisfaites avec deux variables indépendantes en posant

$$\sum_1^5 m\,d\mathrm{F} = 0, \qquad \sum_1^5 n\,d\mathrm{F} = 0, \qquad \sum_1^5 p\,d\mathrm{F} = 0,$$

qui comportent une fonction arbitraire (*voir* Mémoire précité, Chapitre VI).

Cherchons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients des équations (1) pour que l'on se trouve dans ce cas particulier.

Il faut et il suffit que l'on puisse déterminer ω, puis des quantités m, n, p, de façon que l'on ait

$$s_i = m r_i + n b_i + p a_i.$$

Supposons d'abord que l'équation (11) ait ses racines distinctes. On aura

$$\Sigma \mathrm{C} s = 0, \qquad \Sigma \mathrm{D} s = 0,$$

et inversement on voit aisément que ces conditions sont suffisantes.

On a

$$\begin{aligned} s_i &= \Delta_1 r_{i1} + \Delta_2 r_{i2} + \ldots + \Delta_6 r_{i6}, \\ &= \Delta_1 \frac{d}{dx_1}(\mathrm{R}_i + \mathrm{S}_i\omega) + \ldots + \Delta_6 \frac{d}{dx_6}(\mathrm{R}_i + \mathrm{S}_i\omega) \\ &\quad - \Delta_1 \frac{d}{dx_i}(\mathrm{R}_1 + \mathrm{S}_1\omega) - \ldots - \Delta_6 \frac{d}{dx_i}(\mathrm{R}_6 + \mathrm{S}_6\omega), \\ &= \mathrm{U}_i + \mathrm{S}_i \Delta(\omega) - \Sigma \Delta \mathrm{S} \frac{d\omega}{dx_i}, \end{aligned}$$

U_i étant une fonction du second degré de ω. On aura donc

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \mathrm{C} s &= \Sigma \mathrm{C}\mathrm{U} - \Sigma \Delta \mathrm{S}\, \Sigma \mathrm{C} \frac{d\omega}{dx} = 0, \\ \Sigma \mathrm{D} s &= \Sigma \mathrm{D}\mathrm{U} - \Sigma \Delta \mathrm{S}\, \Sigma \mathrm{D} \frac{d\omega}{dx} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si ces deux équations ont une solution commune, cette solution

fournira une équation

$$\Sigma(A + \omega B)\frac{dF}{dx} = 0,$$

dont cinq solutions distinctes seront les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_5$.

Le cas où l'équation (11) a une racine double sera étudié plus tard.

11. Écartons maintenant ce cas, c'est-à-dire supposons ω différent d'une solution commune des équations (56) et reprenons l'équation (55). Calculons pour cela les quantités t.

On a

$$\begin{aligned}
t_i &= \Delta_1 s_{i1} + \ldots + \Delta_6 s_{i6},\\
&= \Delta_1 \frac{ds_i}{dx_1} + \ldots + \Delta_6 \frac{ds_i}{dx_6} - \Delta_1 \frac{ds_1}{dx_i} - \ldots - \Delta_6 \frac{ds_6}{dx_i},\\
&= \Delta_1\left[\frac{dU_i}{dx_1} + \frac{dU_i}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_1} + \frac{dS_i}{dx_1}\Delta(\omega) + S_i\frac{d}{dx_1}(\Delta\omega) - \frac{d}{dx_1}(\Sigma AS)\frac{d\omega}{dx_i} - \Sigma AS\frac{d^2\omega}{dx_i dx_1}\right] + \ldots\\
&\quad + \Delta_6\left[\frac{dU_i}{dx_6} + \frac{dU_i}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_6} + \frac{dS_i}{dx_6}\Delta(\omega) + S_i\frac{d}{dx_6}(\Delta\omega) - \frac{d}{dx_6}(\Sigma AS)\frac{d\omega}{dx_i} - \Sigma AS\frac{d^2\omega}{dx_i dx_6}\right]\\
&\quad - \Delta_1\frac{ds_1}{dx_i} - \ldots - \Delta_6\frac{ds_6}{dx_i},
\end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$\Sigma AS = I,$$

$$\begin{aligned}
t_i &= \Delta_1\frac{dU_i}{dx_1} + \ldots + \Delta_6\frac{dU_i}{dx_6} + \frac{dU_i}{d\omega}\Delta(\omega) + \Delta(S_i)\Delta(\omega) + S_i\Delta^2(\omega) - \Delta(I)\frac{d\omega}{dx_i} - I\Delta\left(\frac{d\omega}{dx_i}\right)\\
&\quad - \Delta_1\left[\frac{dU_1}{dx_i} + \frac{dU_1}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_i} + \frac{dS_1}{dx_i}\Delta(\omega) + S_1\frac{d}{dx_i}[\Delta(\omega)] - \frac{dI}{dx_i}\frac{d\omega}{dx_1} - I\frac{d^2\omega}{dx_1 dx_i}\right] - \ldots\\
&\quad - \Delta_6\left[\frac{dU_6}{dx_i} + \frac{dU_6}{d\omega}\frac{d\omega}{dx_i} + \frac{dS_6}{dx_i}\Delta(\omega) + S_6\frac{d}{dx_i}[\Delta(\omega)] - \frac{dI}{dx_i}\frac{d\omega}{dx_6} - I\frac{d^2\omega}{dx_6 dx_i}\right],
\end{aligned}$$

ou bien

$$t_i = V_i + I'\frac{d\omega}{dx_i} + T_i\Delta(\omega) + S_i\Delta^2(\omega) - I\frac{d}{dx_i}[\Delta(\omega)],$$

V_i, I', T_i étant des fonctions du troisième, du second et du premier

degré en ω. L'équation (55) devient alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & R_1+S_1\omega & U_1+S_1\Delta(\omega)-I\dfrac{d\omega}{dx_1} & V_1+I'\dfrac{d\omega}{dx_1}+T_1\Delta(\omega)+S_1\Delta^2(\omega)-I\dfrac{d}{dx_1}[\Delta(\omega)] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_6 & b_6 & R_6+S_6\omega & U_6+S_6\Delta(\omega)-I\dfrac{d\omega}{dx_6} & V_6+I'\dfrac{d\omega}{dx_6}+T_6\Delta(\omega)+S_6\Delta^2(\omega)-I\dfrac{d}{dx_6}[\Delta(\omega)] \end{vmatrix}.$$

Les équations

$$s=\Sigma\Delta^2(\lambda)\frac{dF}{dx},\qquad t=\Sigma\Delta^3(\lambda)\frac{dF}{dx}$$

montrent que l'on a, en posant comme il a été fait,

$$C+\omega' D=\Delta',$$

les relations

$$\Sigma\Delta' s=0,\qquad \Sigma\Delta' t=0,$$

c'est-à-dire

$$(57)\qquad \begin{cases} \Sigma\Delta' U - I\Delta'(\omega)=0, \\ \Sigma\Delta' V + I'\Delta'(\omega)+\Delta(\omega)\Sigma T\Delta' - I\Delta'\Delta(\omega). \end{cases}$$

Les relations

$$\Sigma a\Delta'=0,\qquad \Sigma b\Delta'=0,\qquad \Sigma r\Delta'=0,\qquad \Sigma s\Delta'=0,\qquad \Sigma t\Delta'=0,$$

jointes à

$$\Sigma a\Delta=0,\qquad \Sigma b\Delta=0,\qquad \Sigma r\Delta=0,\qquad \Sigma s\Delta=0,\qquad \Sigma t\Delta=0,$$

montrent que les équations (57) peuvent remplacer (55) : ω' y entre au premier degré ; en l'éliminant, on en tire l'équation en ω

$$(58)\qquad \frac{\Sigma CU - I\Sigma C\dfrac{d\omega}{dx}}{\Sigma DU - I\Sigma D\dfrac{d\omega}{dx}} = \frac{\Sigma CV + I'\Sigma C\dfrac{d\omega}{dx} + \Delta(\omega)\Sigma CT - I\Sigma C\dfrac{d}{dx}[\Delta(\omega)]}{\Sigma DV + I'\Sigma D\dfrac{d\omega}{dx} + \Delta(\omega)\Sigma DT - I\Sigma D\dfrac{d}{dx}[\Delta(\omega)]}.$$

Cette équation, qui peut remplacer les équations (55), est toujours du second ordre.

Reprenons l'équation

$$\Sigma \Delta' U - I\Delta'(\omega) = 0.$$

On aurait de même

$$\Sigma \Delta U' - J\Delta(\omega') = 0,$$

en posant

$$R'_i + S'_i \omega' = r'_i = \Delta'_1 a_{i1} + \ldots + \Delta'_6 a_{i6},$$

$$U'_i + S'_i \Delta'(\omega') - J\frac{d\omega'}{\partial x_i} = s'_i = \Delta'_1 r'_{i1} + \ldots + \Delta'_6 r'_{i6},$$

$$J = \Sigma C S'.$$

La première donne

$$\omega' = -\frac{\Sigma C U - I\Sigma C\frac{d\omega}{dx}}{\Sigma D U - I\Sigma D\frac{d\omega}{dx}};$$

en portant cette valeur dans la seconde, on a une équation du second ordre qui ne peut être autre que (58). Donc, les équations

(59) $$\begin{cases} \Sigma \Delta' U - I\Delta'(\omega) = 0, \\ \Sigma \Delta U' - J\Delta(\omega') = 0 \end{cases}$$

sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$\Sigma(A + \omega B)\frac{dF}{dx} = 0,$$

$$\Sigma(C + \omega' D)\frac{dF}{dx} = 0$$

forment un système complet. I et J, étant tous deux la condition pour que l'équation (11) ait une racine double, ne peuvent différer que par une constante.

Je vais maintenant m'occuper de la construction des développements en série des intégrales du système (1), question qui peut offrir un certain intérêt.

Soient

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_6) = u,$$

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_6) = v$$

les variables indépendantes. On a les équations

$$\Sigma a\,dx = 0,$$
$$\Sigma b\,dx = 0,$$
$$\Sigma(R + \omega S)dx = 0,$$
$$\Sigma(R' + \omega' S')dx = 0.$$

Ces quatre équations ont deux systèmes de solutions qui sont

$$A_1 + \omega B_1,\ \ldots,\ A_6 + \omega B_6,$$
$$C_1 + \omega' D_1,\ \ldots,\ C_6 + \omega' D_6.$$

On aura donc

$$\frac{dx}{du} = \lambda(A + \omega B) + \mu(C + \omega' D),$$
$$\frac{dx}{dv} = \lambda'(A + \omega B) + \mu'(C + \omega' D).$$

On en tire

$$1 = \lambda\Delta(F) + \mu\Delta'(F), \qquad 0 = \lambda\Delta(\Phi) + \mu\Delta'(\Phi),$$
$$0 = \lambda'\Delta(F) + \mu'\Delta'(F), \qquad 1 = \lambda'\Delta(\Phi) + \mu'\Delta'(\Phi),$$

d'où

$$\lambda = \frac{\Delta'(\Phi)}{H}, \qquad \lambda' = -\frac{\Delta'(F)}{H}, \qquad \mu = \frac{-\Delta(\Phi)}{H}, \qquad \mu' = \frac{\Delta(F)}{H},$$

avec

$$H = \Delta(F)\Delta'(\Phi) - \Delta(\Phi)\Delta'(F).$$

On aura de même pour les fonctions ω et ω'

$$\frac{d\omega}{du} = \lambda\Delta(\omega) + \mu\Delta'(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{du} = \lambda\Delta(\omega') + \mu\Delta'(\omega'),$$
$$\frac{d\omega}{dv} = \lambda'\Delta(\omega) + \mu'\Delta'(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{dv} = \lambda'\Delta(\omega') + \mu'\Delta'(\omega'),$$

d'où

$$\Delta'(\omega) = \lambda\frac{d\omega}{dv} - \lambda'\frac{d\omega}{du},$$
$$-\Delta(\omega') = \mu\frac{d\omega'}{dv} - \mu'\frac{d\omega'}{du}.$$

On remplacera dans ces équations $\Delta(\omega')$ et $\Delta'(\omega)$ par les valeurs fournies par les équations (59) et l'on aura le système suivant :

$$\frac{dx_1}{du} = f_1(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dx_6}{du} = f_6(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),$$

$$\frac{dx_1}{dv} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dx_6}{dv} = \varphi_6(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega'),$$

$$\frac{d\omega}{du} = m(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega') + n(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega')\frac{d\omega}{dv},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\omega'}{du} = p(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega') + q(x_1, \ldots, x_6, \omega, \omega')\frac{d\omega'}{dv}.$$

Si l'on se donne pour les valeurs initiales de u et de v celles de $x_1, \ldots, x_6$, ce qui n'en fait que quatre d'arbitraires, puis les fonctions ω et ω' de v pour la valeur initiale de u, on peut construire les développements en série qui seront convergents.

La solution comporte donc deux fonctions arbitraires d'une variable [1].

12. Nous allons maintenant nous occuper du cas de la racine double.

On a d'abord à voir si l'on peut annuler tous les déterminants du Tableau

$$\left|\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_6 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_6 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_6 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_6 \end{array}\right|,$$

[1] Les systèmes d'équations aux dérivées partielles de ce genre ont été étudiés dans le savant *Traité d'Analyse* de M. Méray, t. I, Chap. XII.

c'est-à-dire ici

$$(60)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ R_1+S_1\omega & R_2+S_2\omega & R_3+S_3\omega & R_4+S_4\omega & R_5+S_5\omega & R_6+S_6\omega \\ U_1+S_1\Delta(\omega) & U_2+S_2\Delta(\omega) & U_3+S_3\Delta(\omega) & U_4+S_4\Delta(\omega) & U_5+S_5\Delta(\omega) & U_6+S_6\Delta(\omega) \end{vmatrix}$$

Si tous ces déterminants sont nuls, on aura, α, β, γ étant convenablement choisis,

$$U + S\Delta(\omega) = \alpha a + \beta b + \gamma(R + \omega S).$$

On en tire

$$(61)\qquad \Sigma AU = 0, \qquad \Sigma BU = 0;$$

on a

$$U = L + M\omega + N\omega^2,$$

et l'on a les relations

$$\Sigma AL = 0, \quad \Sigma(BL + AM) = 0, \quad \Sigma(AN + BM) = 0, \quad \Sigma BN = 0.$$

Les équations (61) deviennent

$$\omega\Sigma AM + \omega^2\Sigma AN = 0,$$
$$\Sigma BL + \omega\,\Sigma BM = 0.$$

Elles fournissent pour ω une et une seule valeur. Les équations (60) se réduisent alors à une qui est la condition cherchée.

Considérons maintenant le cas tout à fait général et voyons si l'équation en ω est du second ordre; c'est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & R_1+S_1\omega & U_1+S_1\Delta(\omega) & V_1+F\dfrac{d\omega}{dx_1}+T_1\Delta(\omega)+S_1\Delta^2(\omega) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_6 & b_6 & R_6+S_6\omega & U_6+S_6\Delta(\omega) & V_6+F\dfrac{d\omega}{dx_6}+T_6\Delta(\omega)+S_6\Delta^2(\omega) \end{vmatrix}$$

Les termes en $\Delta^2(\omega)$ sont les déterminants du Tableau

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \end{matrix}\right|.$$

Si tous ces déterminants étaient nuls, on pourrait déterminer α, β, γ, δ tels que l'on ait

$$U = \alpha a + \beta b + \gamma R + \delta S.$$

On en tirerait

$$\Sigma AU = 0, \qquad \Sigma BU = 0.$$

Je vais démontrer que dans ce cas l'équation (11) est identique. Pour cela nous supposerons le système (1) ramené à la forme

$$dz_3 - z_4 dz_1 - z_5 dz_2 = 0,$$

$$c_1 dz_1 + c_2 dz_2 + c_4 dz_4 + c_5 dz_5 = 0.$$

On a trouvé

$$\begin{array}{lll} A_1 = c_4, & A_2 = c_5, & A_3 = c_4 z_4 + c_5 z_5, \\ A_4 = -c_1, & A_5 = -c_2, & A_6 = 0, \\ B_1 = 0, & B_2 = 0, & B_3 = 0, \\ B_4 = 0, & B_5 = 0, & B_6 = 1. \end{array}$$

On a ensuite

$$R_1 = \left(\frac{dc_1}{dz_2} - \frac{dc_2}{dz_1}\right) c_5 + \frac{dc_1}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_1}{dz_4} - \frac{dc_4}{dz_1}\right) c_1 - \left(\frac{dc_1}{dz_5} - \frac{dc_5}{dz_1}\right) c_2,$$

$$S_1 = \frac{dc_1}{dz_6},$$

$$R_2 = \left(\frac{dc_2}{dz_1} - \frac{dc_1}{dz_2}\right) c_4 + \frac{dc_2}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_2}{dz_4} - \frac{dc_4}{dz_2}\right) c_1 - \left(\frac{dc_2}{dz_5} - \frac{dc_5}{dz_2}\right) c_2,$$

$$S_2 = \frac{dc_2}{dz_6},$$

$$R_3 = -\frac{dc_1}{dz_3}c_4 - \frac{dc_2}{dz_3}c_5 + \frac{dc_4}{dz_3}c_1 + \frac{dc_5}{dz_3}c_2,$$

$$S_3 = 0,$$

$$R_4 = \left(\frac{dc_4}{dz_1} - \frac{dc_1}{dz_4}\right)c_4 + \left(\frac{dc_4}{dz_2} - \frac{dc_2}{dz_4}\right)c_5 + \frac{dc_4}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_4}{dz_5} - \frac{dc_5}{dz_4}\right)c_2,$$

$$S_4 = \frac{dc_4}{dz_6},$$

$$R_5 = \left(\frac{dc_5}{dz_1} - \frac{dc_1}{dz_5}\right)c_4 + \left(\frac{dc_5}{dz_3} - \frac{dc_2}{dz_5}\right)c_5 + \frac{dc_5}{dz_3}(c_4 z_4 + c_5 z_5) - \left(\frac{dc_5}{dz_4} - \frac{dc_4}{dz_5}\right)c_1,$$

$$S_5 = \frac{dc_5}{dz_6},$$

$$R_6 = -\frac{dc_1}{dz_6}c_4 - \frac{dc_2}{dz_6}c_5 + \frac{dc_4}{dz_6}c_1 + \frac{dc_5}{dz_6}c_2,$$

$$S_6 = 0.$$

Formons l'expression $\Sigma BU' = 0$; elle se réduit à $U_6 = 0$. On a

$$U_6 = \Delta_1 r_{61} + \ldots + \Delta_6 r_{66}.$$

On a, dans le cas de la racine double,

$$R_6 = 0;$$

comme S_6 est nul, on a en somme $r_6 = 0$, et, par suite, l'équation

$$U_6 = 0$$

devient

$$\Delta_1 \frac{dr_1}{dz_6} + \Delta_2 \frac{dr_2}{dz_6} + \ldots + \Delta_5 \frac{dr_5}{dz_6} = 0;$$

on a de plus, puisque r_6 est nul,

$$\Delta_1 r_1 + \Delta_2 r_2 + \ldots + \Delta_5 r_5 = 0;$$

il vient donc

$$\Delta_1 \frac{dr_1}{dz_6} + \ldots + \Delta_5 \frac{dr_5}{dz_6} = -\left(r_1 \frac{d\Delta_1}{dz_6} + \ldots + r_5 \frac{d\Delta_5}{dz_6}\right),$$

et l'équation

$$U_6 = 0$$

devient finalement

$$R_1 \frac{dc_4}{dz_6} + R_2 \frac{dc_5}{dz_6} + R_3 \left(z_4 \frac{dc_4}{dz_6} + z_5 \frac{dc_5}{dz_6} \right) - R_4 \frac{dc_1}{dz_6} - R_5 \frac{dc_2}{dz_6} = 0.$$

On vérifie par un calcul facile que cette condition, jointe à $R_6 = 0$, se transforme dans la condition pour que l'équation (11) soit identique.

Ainsi, le cas où l'équation (11) a ses racines égales n'offre rien de particulier.

Il nous reste à construire les développements en série. Nous partirons des équations

$$\begin{aligned} &\Sigma a\, dx = 0, \\ &\Sigma b\, dx = 0, \\ &\Sigma (R + S\omega)\, dx = 0, \\ &\Sigma [U + S\Delta(\omega)]\, dx = 0, \\ &\Sigma [V + T\Delta(\omega) + S\Delta^2(\omega)]\, dx + I'\, d\omega = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\Delta(\omega) = \omega',$$

les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} &\Sigma a\, dx = 0, \\ &\Sigma b\, dx = 0, \\ &\Sigma (R + S\omega)\, dx = 0, \\ &\Sigma (U + S\omega')\, dx = 0, \\ &\Sigma [V + T\omega' + S\Delta(\omega')]\, dx + I'\, d\omega = 0. \end{aligned}$$

Le système $A + B\omega$ mis en place de dx satisfait à ces équations; des quatre premières on tire un autre système

$$M + N\omega',$$

qui satisfait aux quatre premières; M et N sont des fonctions de ω du troisième degré.

On aura alors

$$\frac{dx}{du} = \lambda\,(A + B\omega) + \mu\,(M + N\omega'),$$

$$\frac{dx}{dv} = \lambda'(A + B\omega) + \mu'(M + N\omega');$$

u, v étant les variables indépendantes, soient

$$F(x_1, \ldots, x_6) = u,$$

$$\Phi(x_1, \ldots, x_6) = v.$$

On aura, en posant

$$\Sigma(A + B\omega)\frac{dF}{dx} = \Delta\,(F),$$

$$\Sigma(M + N\omega')\frac{dF}{dx} = \Delta_1(F),$$

les équations

$$1 = \lambda\,\Delta(F) + \mu\,\Delta_1(F),$$

$$0 = \lambda'\Delta(F) + \mu'\Delta_1(F),$$

$$0 = \lambda\,\Delta(\Phi) + \mu\,\Delta_1(\Phi),$$

$$1 = \lambda'\Delta(\Phi) + \mu'\Delta_1(\Phi),$$

qui déterminent λ, μ, λ', μ'. On aura ensuite

$$\Sigma(V + T\omega')(M + N\omega') + \Delta(\omega')\Sigma S(M + N\omega') + I\,\Delta_1(\omega) = 0,$$

et enfin

$$\frac{d\omega}{du} = \lambda\,\omega + \mu\,\Delta_1(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{du} = \lambda\,\Delta(\omega') + \mu\,\Delta_1(\omega'),$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \lambda'\omega' + \mu'\Delta_1(\omega), \qquad \frac{d\omega'}{dv} = \lambda'\Delta(\omega') + \mu'\Delta_1(\omega').$$

On en tire, en posant

$$H = \Delta(F)\Delta_1(\Phi) - \Delta(\Phi)\Delta_1(F),$$

$$\lambda = \frac{\Delta_1(\Phi)}{H}, \qquad \lambda' = -\frac{\Delta_1(F)}{H}, \qquad \mu = -\frac{\Delta(\Phi)}{H}, \qquad \mu' = \frac{\Delta(F)}{H},$$

les équations

$$\Delta_1(\omega) = \lambda\frac{d\omega}{dv} - \lambda'\frac{d\omega}{du},$$

$$\omega' = \mu'\frac{d\omega}{du} - \mu\frac{d\omega}{dv},$$

$$\Delta(\omega') = \mu'\frac{d\omega'}{du} - \mu'\frac{d\omega'}{dv};$$

d'où finalement les équations

$$\omega' = \mu'\frac{d\omega}{du} - \mu\frac{d\omega}{dv},$$

$$\Sigma(V+T\omega')(M+N\omega') + \left(\mu'\frac{d\omega'}{du} - \mu\frac{d\omega'}{dv}\right)\Sigma MS + I'\left(\lambda\frac{d\omega}{dv} - \lambda'\frac{d\omega}{du}\right) = 0.$$

On en tire

$$\frac{d\omega}{dv} = \alpha + \beta\frac{d\omega}{du},$$

$$\frac{d\omega'}{dv} = \alpha' + \beta'\frac{d\omega'}{du} + \gamma'\frac{d\omega}{du},$$

qui permettent la construction de développements en séries convergentes et montrent que l'on peut prendre arbitrairement les valeurs de quatre des quantités $x_1, \ldots, x_6$ pour les valeurs initiales de u et v, ainsi que les fonctions ω et ω' de u pour la valeur initiale de v ([1]).

15. On peut former des équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Bien que n'ayant pas servi, elles ont néan-

([1]) Voir la note de la page 70.

moins un certain intérêt. Reprenons les équations des deux Tableaux :

$$\left\| \begin{matrix} \frac{d\omega_1}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_1}{dx_6} \\ \frac{d\omega_2}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_2}{dx_6} \\ \frac{d\omega_3}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_3}{dx_6} \\ \frac{d\omega_4}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_4}{dx_6} \\ a_1 & \cdots & a_6 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{d\omega_1}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_1}{dx_6} \\ \frac{d\omega_2}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_2}{dx_6} \\ \frac{d\omega_3}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_3}{dx_6} \\ \frac{d\omega_4}{dx_1} & \cdots & \frac{d\omega_4}{dx_6} \\ b_1 & \cdots & b_6 \end{matrix} \right\|.$$

On en tire les équations du Tableau suivant :

$$(62) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{dF}{dx_1} & \cdots & \frac{dF}{dx_6} \\ \frac{d\Phi}{dx_1} & \cdots & \frac{d\Phi}{dx_6} \\ \frac{d\Psi}{dx_1} & \cdots & \frac{d\Psi}{dx_6} \\ a_1 & \cdots & a_6 \\ b_1 & \cdots & b_6 \end{matrix} \right\|.$$

Tous les déterminants de ce Tableau seront nuls quand on y remplacera F, Φ, Ψ par trois des fonctions ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

Développons tous ces déterminants en négligeant d'abord la première colonne du Tableau, puis la seconde, etc., puis la dernière. Dérivons la première équation par rapport à x_1, la seconde par rapport à x_2, etc., la dernière par rapport à x_6, et ajoutons; les dérivées secondes des fonctions F, Φ, Ψ disparaissent et si dans l'équation obtenue on remplace

$$\frac{d\Psi}{dx}$$

par

$$\lambda \frac{dF}{dx} + \mu \frac{d\Phi}{dx} + \nu a + \rho b,$$

en vertu des équations du Tableau (62), les termes en λ et μ dispa-

raissent; le coefficient de ν est alors

$$L_{2345}\frac{F\Phi}{x_1x_6}+\ldots-L_{6123}\frac{F\Phi}{x_4x_5};$$

celui de ρ est

$$M_{2345}\frac{F\Phi}{x_1x_6}+\ldots-M_{6123}\frac{F\Phi}{x_4x_5}.$$

Or, pour les valeurs de F et Φ égales à ω_1 et ω_2, par exemple, on peut remplacer Ψ par ω_3 et ω_4; on en déduit que les coefficients de ν et ρ doivent être nuls. Ces coefficients s'écrivent [*voir* les équations (27)]

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(L_{2345}\frac{dF}{dx_1}+L_{3451}\frac{dF}{dx_2}+L_{4512}\frac{dF}{dx_3}+L_{5123}\frac{dF}{dx_4}+L_{1234}\frac{dF}{dx_5}\right)\frac{d\Phi}{dx_6}\\ &+\ldots\ldots\\ &-\left(L_{1234}\frac{dF}{dx_6}+L_{2346}\frac{dF}{dx_1}+L_{3461}\frac{dF}{dx_2}+L_{4612}\frac{dF}{dx_3}+L_{6123}\frac{dF}{dx_4}\right)\frac{d\Phi}{dx_5}=0\end{aligned}\right.$$

et

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(M_{2345}\frac{dF}{dx_1}+M_{3451}\frac{dF}{dx_2}+M_{4512}\frac{dF}{dx_3}+M_{5123}\frac{dF}{dx_4}+M_{1234}\frac{dF}{dx_5}\right)\frac{d\Phi}{dx_6}\\ &+\ldots\ldots\\ &-\left(M_{1234}\frac{dF}{dx_6}+M_{2346}\frac{dF}{dx_1}+M_{3461}\frac{dF}{dx_2}+M_{4612}\frac{dF}{dx_3}+M_{6123}\frac{dF}{dx_4}\right)\frac{d\Phi}{dx_5}=0.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, je dis que, si ces équations en Φ ont pour une valeur de F quatre solutions communes ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ces fonctions satisfont à la question. Pour cela, désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ les coefficients de $\frac{d\Phi}{dx_1}, \ldots, \frac{d\Phi}{dx_6}$ dans l'équation (63); par $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_6$ les coefficients de $\frac{d\Phi}{dx_1}, \ldots, \frac{d\Phi}{dx_6}$ dans l'équation (64). On vérifie sans peine que l'on a, quel que soit F,

$$a_1\Delta_1+\ldots+a_6\Delta_6=0,$$

$$b_1\Delta_1+\ldots+b_6\Delta_6=0,$$

$$a_1\Delta'_1+\ldots+a_6\Delta'_6=0,$$

$$b_1\Delta'_1+\ldots+b_6\Delta'_6=0.$$

Les équations

$$
\begin{aligned}
X_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_1}{dx_6} &= 0 \\
X_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_2}{dx_6} &= 0 \\
X_1 \frac{d\omega_3}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_3}{dx_6} &= 0 \\
X_1 \frac{d\omega_4}{dx_1} + \ldots + X_6 \frac{d\omega_4}{dx_6} &= 0 \\
X_1\, a_1 \; + \ldots + X_6\, a_6 \; &= 0
\end{aligned}
$$

sont satisfaites pour les valeurs $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \Delta_1, \ldots, \Delta_6$ données aux quantités $X_1, \ldots, X_6$; si ces valeurs sont distinctes, c'est-à-dire si l'on n'est pas dans des cas particuliers étudiés, les équations précédentes se réduisent à quatre et tous les déterminants du Tableau

$$
\left|\begin{array}{ccc}
\frac{d\omega_1}{dx_1} & \ldots & \frac{d\omega_1}{dx_6} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{d\omega_4}{dx_1} & \ldots & \frac{d\omega_4}{dx_6} \\
a_1 & \ldots & a_6
\end{array}\right|
$$

sont nuls, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, considérons l'équation

$$
\Sigma A \frac{dF}{dx} + \omega \Sigma B \frac{dF}{dx} = 0.
$$

On en tirera

$$
(65) \qquad \frac{A_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + A_6 \frac{d\omega_1}{dx_6}}{B_1 \frac{d\omega_1}{dx_1} + \ldots + B_6 \frac{d\omega_1}{dx_6}} = \frac{A_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + A_6 \frac{d\omega_2}{dx_6}}{B_1 \frac{d\omega_2}{dx_1} + \ldots + B_6 \frac{d\omega_2}{dx_6}}.
$$

Je dis que cette équation est une combinaison des équations (63)

et (64). En effet, écrivons les deux équations

$$A_1 \frac{dF}{dx_1} + \ldots + A_6 \frac{dF}{dx_6} = 0,$$

$$B_1 \frac{dF}{dx_1} + \ldots + B_6 \frac{dF}{dx_6} = 0.$$

Si l'on forme les combinaisons où manquent successivement $\frac{dF}{dx_6}$, $\frac{dF}{dx_1}$, $\ldots$, $\frac{dF}{dx_5}$, ce sont

$$(A_1 B_6 - A_6 B_1) \frac{dF}{dx_1} + \ldots + (A_5 B_6 - A_6 B_5) \frac{dF}{dx_5} = 0,$$

$$(B_1 A_5 - A_1 B_5) \frac{dF}{dx_1} + \ldots + (B_6 A_5 - A_6 B_5) \frac{dF}{dx_6} = 0.$$

Or ces équations sont encore

$$(\lambda L_{2345} - \mu M_{2345}) \frac{dF}{dx_1} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où il suit bien que les rapports

$$\frac{A_1 B_6 - A_6 B_1}{\lambda L_{2345} - \mu M_{2345}}$$

auront tous la même valeur et que par suite l'équation (65) est bien la combinaison obtenue en multipliant (63) par λ, (64) par μ et en retranchant.

Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum;

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

1. On sait que la position d'équilibre d'un système matériel est stable si, dans cette position, la fonction de forces est maximum. Quant aux positions d'équilibre pour lesquelles cette dernière condition n'est pas remplie, on les caractérise souvent comme instables, quoique leur instabilité n'ait jamais été démontrée d'une manière générale. Toutefois, pour une classe assez étendue de cas, on peut la démontrer aisément, comme je l'ai fait voir dans mon Ouvrage intitulé *Le problème général de la stabilité du mouvement* (Kharkow, 1892), où j'ai montré que, pour les cas ordinaires de la non-existence du maximum, la proposition de l'instabilité de l'équilibre n'est qu'un corollaire d'un théorème général sur lequel j'avais déjà appelé l'attention dans mon Mémoire *Sur les mouvements permanents d'un corps solide dans un liquide* (Communications de la Société mathématique de Kharkow, 2e série, t. I, 1888).

Dans cette Note, je me propose d'exposer mon analyse en tant qu'elle se rapporte au théorème de l'instabilité de l'équilibre; mais pour cela je suis obligé de reprendre quelques considérations générales.

2. Soit donné un système d'équations différentielles

$$
(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,
$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions données des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, fonctions que nous supposerons holomorphes, c'est-à-dire susceptibles d'être représentées par des séries entières en x_i, tant que les modules de ces variables ne surpassent pas une certaine limite. Nous supposerons, de plus, que ces fonctions s'annulent toutes pour

$$
x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,
$$

et nous poserons

$$
X_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n + R_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),
$$

R_i ne contenant, dans son développement, que des termes de la seconde dimension et des dimensions plus élevées.

Les p_{ij}, ainsi que les coefficients des développements des R_i, seront supposés de constantes réelles.

Toute solution des équations (1) sera définie par les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que nous appellerons $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Vu les problèmes de Mécanique, nous ne considérerons ces solutions que pour des valeurs réelles de t supérieures à sa valeur initiale, pour laquelle nous prendrons la valeur zéro.

Les équations (1) admettent toujours pour solution

$$
x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0.
$$

Nous dirons que c'est une *solution stable* si, pour tout nombre positif l, quelque petit qu'il soit, on peut assigner un autre nombre positif ε, tel qu'on ait

$$
|x_1| < l, \qquad |x_2| < l, \qquad \ldots, \qquad |x_n| < l
$$

pour toutes les valeurs positives de t, dès qu'on prend pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$

des valeurs réelles quelconques satisfaisant aux inégalités

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \qquad |\alpha_2| < \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Si, au contraire, on peut assigner un nombre fixe l différent de zéro, tel que, si petit que soit le nombre positif ε, on puisse toujours trouver des valeurs réelles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfaisant aux inégalités

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \qquad |\alpha_2| < \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |\alpha_n| < \varepsilon$$

et conduisant, pour une valeur positive de t, à une au moins des égalités de la forme

$$|x_i| = l,$$

la solution considérée sera dite instable.

Cette définition posée, on aura la proposition suivante :

Si, parmi les racines de l'équation algébrique

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(qui sera dite équation déterminante), *il y en a dont les parties réelles soient positives, la solution*

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

est instable.

Cette proposition se déduit presque immédiatement de la considération de certaines solutions des équations (1), solutions appartenant à l'espèce de celles qu'on appelle aujourd'hui, d'après M. Poincaré, *solutions asymptotiques* [1].

---

[1] Sous certaines conditions, l'existence de ces solutions a été établie dans mon Mémoire *Sur les mouvements permanents d'un corps solide dans un*

Supposons que parmi les racines

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

de l'équation (2) il s'en trouve dont les parties réelles ne soient pas nulles.

Soient

$$(3) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_k$$

k quelconques d'entre elles, ayant leurs parties réelles de même signe.

Alors, en désignant par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_k$$

k constantes arbitraires, on aura une solution des équations (1) qui, dans certaines limites, pourra être représentée par des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives des quantités

$$(4) \qquad \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \alpha_k e^{\lambda_k t}$$

dont les coefficients ne dépendront pas des α_i et seront, en général, des fonctions entières et rationnelles de t, ces séries ne contenant point de termes indépendants des quantités (4) et ayant pour termes du premier degré une solution des équations linéaires

$$(5) \qquad \frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces séries seront convergentes et représenteront une solution des équations (1) pour toutes les valeurs de t, qui ne surpassent pas une certaine limite dépendant des α_i, si les parties réelles des racines (3) sont toutes positives. Elles le seront pour toutes les valeurs de t plus

---

liquide. Je n'y ai pas cité la Thèse de M. Poincaré, où l'on trouve des considérations conduisant à ces solutions, puisque je n'en avais pas encore connaissance à l'époque de la publication de mon Mémoire (1888), quoique cette Thèse fût publiée neuf années avant.

grandes qu'une certaine limite, si les parties réelles desdites racines sont toutes négatives.

Le cas où les coefficients de pareilles séries peuvent être constants est particulièrement intéressant.

Tel sera, par exemple, le cas où, les coefficients des termes du premier degré étant constants, les racines (3) sont telles que l'on ne trouve point de racines de l'équation (2) parmi les nombres de la forme

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_k\lambda_k,$$

qu'on obtient en donnant à $m_1, m_2, \ldots, m_k$ toutes les valeurs entières positives ou nulles, satisfaisant à l'inégalité

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k > 1.$$

Si l'on considère les séries correspondant à la supposition $k = 1$, ces conditions pourront évidemment toujours être remplies. Par exemple, dans le cas où l'équation (2) a des racines positives, il n'y aura qu'à prendre pour λ_1 la plus grande de ces racines, en prenant pour les termes du premier degré la solution convenable des équations (5).

Revenons maintenant à notre proposition.

Supposons que l'équation (2) ait des racines positives et que λ soit la plus grande de ces racines.

D'après ce que nous venons de dire, les équations (1) admettront une solution de la forme

$$x_1 = f_1(\alpha e^{\lambda t}), \qquad x_2 = f_2(\alpha e^{\lambda t}), \qquad \ldots, \qquad x_n = f_n(\alpha e^{\lambda t}),$$

où α est une constante arbitraire et où les seconds membres sont des séries procédant suivant les puissances croissantes de l'argument $\alpha e^{\lambda t}$, dont les coefficients sont des constantes indépendantes de α.

Nous supposerons, ce qui est évidemment permis, que tous ces coefficients soient des constantes réelles.

En prenant pour α une constante réelle que nous supposerons, pour fixer les idées, positive, nous aurons ainsi une solution réelle qui sera définie pour toutes les valeurs de t, satisfaisant à une certaine condi-

tion de la forme

$$\alpha e^{\lambda t} = h,$$

h étant une constante positive, indépendante de α.

Pour cette solution, les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui seront données par les équations

$$a_1 = f_1(\alpha), \qquad a_2 = f_2(\alpha), \qquad \ldots, \qquad a_n = f_n(\alpha),$$

pourront être faites, par le choix de α, aussi petites, en valeurs absolues, qu'on voudra. Mais, quelque petites qu'elles soient, les variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ atteindront toujours, pour une valeur positive de t,

$$t = \frac{1}{\lambda} \log \frac{h}{\alpha}$$

(nous supposons $\alpha < h$), les valeurs

$$f_1(h), \quad f_2(h), \quad \ldots, \quad f_n(h)$$

qui ne dépendent point de α et ne sont pas nulles toutes à la fois (puisque, dans le cas contraire, les fonctions f_i seraient toutes identiquement nulles).

En nous reportant à la définition donnée plus haut, nous devons donc conclure que la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

est instable.

Nous avons supposé que l'équation (2) ait des racines positives. Or, s'il n'y avait pas de pareilles racines, on prendrait une paire de racines imaginaires conjuguées à parties réelles positives et l'on démontrerait le théorème par des considérations analogues. Mais nous ne nous y arrêterons pas, puisqu'une pareille circonstance ne pourra avoir lieu dans le cas que nous avons en vue.

3. Considérons maintenant un système matériel, assujetti à des

liaisons indépendantes du temps t, et supposons que ce système se trouve sous l'influence des forces, dérivant d'une fonction de forces U ne contenant explicitement que les coordonnées.

En supposant que notre système comporte un nombre fini n de degrés de liberté, nous exprimerons toutes les coordonnées au moyen des variables indépendantes réelles

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n,$$

que nous choisirons de manière à s'annuler dans une certaine position d'équilibre du système, et nous supposerons que la fonction U, ainsi que la force vive du système, étant exprimées au moyen de ces variables, en deviennent des fonctions holomorphes. Nous supposerons, de plus, que la force vive, pour $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, reste une forme quadratique *définie* des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

Dans ces suppositions, les équations différentielles du mouvement, qui définissent les variables

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n, \qquad q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, \qquad q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \qquad \ldots, \qquad q'_n = \frac{dq_n}{dt}$$

en fonctions de t, seront susceptibles d'être ramenées à la forme des équations (1).

Nous pourrons donc nous servir du théorème qui vient d'être établi, et si l'on pose

$$U = U_2 + U_3 + U_4 + \ldots,$$

U_m désignant, d'une manière générale, une forme de degré m par rapport aux variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, ce théorème nous conduira à la conclusion suivante :

Si, dans la position d'équilibre, définie par les équations

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_n = 0,$$

la fonction de forces n'est pas un maximum et *que cela se manifeste par cette circonstance que la forme quadratique* U_2 *puisse devenir positive,* c'est une position d'équilibre instable.

En effet, par la théorie des petites oscillations, on sait qu'à la con-

dition indiquée l'équation déterminante admet toujours au moins une racine positive.

On doit donc conclure que la solution

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \ldots, \quad q_n = 0,$$
$$q'_1 = 0, \quad q'_2 = 0, \quad \ldots, \quad q'_n = 0$$

des équations différentielles du mouvement est instable.

Or, cela revient à dire que la position d'équilibre considérée est instable, et l'on peut même ajouter que cette instabilité a déjà lieu par rapport aux variables

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n,$$

c'est-à-dire qu'elle se reconnaît déjà par les valeurs que peuvent prendre ces variables. On s'en assure aisément, en ayant égard à l'équation des forces vives, qui fait voir que l'instabilité ne peut exister par rapport aux vitesses, si elle n'a point lieu par rapport aux coordonnées.

4. Dans mon Ouvrage cité plus haut, j'ai proposé encore une autre méthode pour traiter les questions de stabilité.

Cette méthode, à laquelle j'ai été conduit par l'étude du Mémoire important de M. Poincaré *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, consiste dans la recherche de certaines fonctions des variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

dont les dérivées totales, prises par rapport à t en vertu des équations (1), jouissent de certaines propriétés.

La méthode repose sur quelques propositions générales, dont je ne citerai ici que les plus simples, en me restreignant d'ailleurs à celles qui se rapportent aux conditions de l'instabilité.

Dans ce qui suit, j'entendrai par V une fonction réelle des variables réelles

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

uniforme et continue, ainsi que ses dérivées partielles de premier ordre, tant que les x_i ne surpassent pas, en valeurs absolues, une cer-

taine limite, et je supposerai que cette fonction s'annule pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Pour abréger le langage, je dirai qu'une pareille fonction est de signe invariable, si elle ne change pas de signe pour les valeurs des x_i satisfaisant aux conditions

$$|x_1| < l, \qquad |x_2| < l, \qquad \ldots, \qquad |x_n| < l,$$

l étant une constante positive suffisamment petite. Si, de plus, cette fonction ne peut s'annuler, à ces conditions, que pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

je dirai, comme dans la théorie des formes, que c'est une *fonction définie*.

Cela posé, on aura la proposition suivante :

Si l'on peut trouver une fonction V *dont la dérivée totale par rapport à* t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n = V'$$

soit une fonction définie, la fonction V *étant telle que, par le choix convenable des* x_i, *quelque petites que soient leurs valeurs absolues, on puisse satisfaire à l'inégalité*

$$VV' > 0,$$

la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

des équations (1) *est instable.*

En effet, en supposant, pour fixer les idées, que la fonction V' soit positive, nous aurons

$$V' > 0$$

pour toutes les valeurs des x_i qui, n'étant pas nulles toutes à la fois, satisfont à certaines conditions de la forme

$$(6) \qquad |x_1| \leq l, \qquad |x_2| \leq l, \qquad \ldots, \qquad |x_n| \leq l,$$

l étant un nombre positif suffisamment petit.

En supposant donc que les valeurs initiales des x_i satisfont à ces conditions, et en désignant par V_0 la valeur initiale de la fonction V, nous aurons

$$(7) \qquad V > V_0$$

pour les valeurs positives de t, tant que les conditions (6) seront remplies.

Par hypothèse, on pourra d'ailleurs toujours satisfaire à l'inégalité

$$V_0 > 0,$$

quelque petits que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en valeurs absolues.

Or, si l'on a $V_0 > 0$, et que l'on considère toutes les valeurs des x_i satisfaisant aux conditions (6) et (7), la fonction V', qui est définie, ne pourra devenir inférieure à un nombre positif μ.

Nous aurons donc $V' \geq \mu$, et par suite

$$V > V_0 + \mu t$$

pour les valeurs positives de t, tant que les conditions (6) seront remplies.

Mais on voit que cela ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs positives de t, puisque, sous les conditions (6), l étant assez petit, la fonction V a une limite supérieure. On doit donc conclure qu'il y aura une valeur positive de t, pour laquelle une au moins des égalités

$$|x_i| = l$$

sera remplie, et cela quelque petits que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en valeurs absolues, pourvu qu'ils satisfassent à l'inégalité $V_0 > 0$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

Nous citerons encore la proposition suivante, qu'on démontrera par des raisonnements analogues :

Si l'on peut trouver une fonction V dont la dérivée totale par rapport à t satisfasse à une égalité de la forme

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

où λ est une constante positive et W une fonction de signe invariable, la fonction V étant susceptible de recevoir le signe de W, quelque petits que soient les x_i en valeurs absolues, la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

est instable.

5. Pour appliquer la méthode que nous venons d'indiquer à la démonstration de la proposition du n° **2**, on considérera une forme quadratique V satisfaisant à l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} (p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_i} = \lambda V + U,$$

λ étant une constante positive et U une forme quadratique donnée, qu'on supposera définie positive.

On s'assure aisément que la fonction V pourra toujours être déterminée de cette manière, pourvu que λ ne soit pas de la forme

$$\lambda_i + \lambda_j,$$

λ_i et λ_j étant des racines quelconques de l'équation (2).

En le supposant, plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse que cette équation ait des racines à parties réelles positives, et supposons que λ soit assez petit pour que, parmi les nombres de la forme $\lambda_i - \lambda$, il s'en trouve dont les parties réelles soient positives.

On démontre aisément qu'à cette condition la forme V sera sus-

ceptible de recevoir des valeurs positives, et comme, en vertu des équations (1), on a

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

où

$$W = U + \sum_{i=1}^{n} R_i \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

est une fonction définie positive, on se trouvera dans les conditions de la seconde proposition du numéro précédent.

On arrive ainsi à la conclusion que la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

est instable.

6 Dans le Mémoire *Le problème général de la stabilité du mouvement*, on trouvera beaucoup d'autres applications de la méthode précédente. Ici nous n'en citerons encore qu'une seule, qui se rapporte aux conditions de l'instabilité de l'équilibre.

En nous plaçant dans les suppositions du n° **5**, nous aurons, pour la demi-force vive du système, une expression de la forme

$$T = T_0 + T_1,$$

où T_0 désigne une forme quadratique définie positive des quantités $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ à coefficients constants et

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} q'_i q'_j,$$

les Q_{ij} étant des fonctions holomorphes des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, s'annulant pour

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0.$$

Cela posé, considérons la fonction

$$V = q_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \ldots + q_n \frac{\partial T}{\partial q'_n}.$$

Les équations différentielles du mouvement étant

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$\frac{dV}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial T_1}{\partial q_i} + 2U_2 + 3U_3 + 4U_4 + \ldots$$

De là on voit que, la forme U_2 étant définie positive, la dérivée $\frac{dV}{dt}$, comme fonction des variables

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n, \quad q'_1, \quad q'_2, \quad \ldots, \quad q'_n,$$

le sera aussi, et plus généralement, si l'on a

$$U_2 = 0, \qquad U_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad U_{2m-1} = 0,$$

quels que soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$, U_{2m} étant une forme définie positive, la dérivée $\frac{dV}{dt}$ sera une fonction définie positive.

Comme la fonction V peut devenir positive, on en conclut, en se reportant à la première proposition du n° 4, que, les conditions ci-dessus étant remplies, la position d'équilibre

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_n = 0$$

est instable.

7. En résumé, le théorème de l'instabilité de l'équilibre se trouve ainsi démontré pour les deux cas suivants :

1° La non-existence du maximum de la fonction de forces se reconnaît par les termes du second ordre, sans qu'il soit nécessaire de considérer les termes des ordres plus élevés;

2° La fonction de forces, dans la position d'équilibre considérée, est minimum, et ce minimum se reconnaît par les termes de l'ordre le moins élevé qu'on puisse trouver dans le développement de cette fonction.

On voit que le premier de ces cas est celui qui se présente le plus souvent dans les applications.

En employant convenablement la méthode indiquée, on pourra sans doute démontrer le théorème encore pour d'autres cas de la non-existence du maximum. Mais pourra-t-on le démontrer en général?

Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques ;

Par M. P. GÜNTHER [1].

Mémoire présenté par M. H. Weber à la Société royale des Sciences de Göttingue, en avril 1894.

Traduit par M. **L. LAUGEL**.

Dans la première des lettres où Jacobi [2] communique sa nouvelle théorie des fonctions elliptiques au vénérable maître Legendre, il dit entre autres choses avoir appris que Gauss, dès l'année 1808, était en

(1) *Voir* la Notice à la fin du Mémoire.

(2) La collection de ces lettres de Jacobi et Legendre se trouve dans le *Bulletin* de M. Darboux, 1re série, t. VIII et IX, 1875. Consulter un intéressant article de M. Jules Tannery, rendant compte de l'Ouvrage de M. Kœnigsberger, *Historique des fonctions elliptiques de* 1826 *à* 1829 (*Bulletin* de M. Darboux, 2e série, t. III, 1879). Dans le même Recueil l'on trouvera encore, 2e série, t. IX, 1885, un article de M. Bertrand rendant compte du Livre de M. Bjerknes, *Niels Henrik Abel*..., où l'éminent géomètre nous dit le dernier mot qui trancherait la question, même si l'on n'avait jamais retrouvé les cahiers de Gauss : « ... il fallait le croire, puisque Gauss l'affirmait. Par l'élévation du caractère comme par la puissance du génie, il était le plus grand de tous. » Dans ces derniers temps, M. Th. Pepin a publié une *Introduction à la théorie des fonctions elliptiques d'après les Œuvres de Gauss* (*Rom. Acc. R. d. N. Lincei*, t. IX, 2e fasc., p. 1-129; 1893), qui est en quelque sorte la réalisation de l'intention de Günther.

L. L.

possession d'une partie des résultats publiés par lui Jacobi en 1827. Legendre met ceci en doute, même après une deuxième affirmation de Jacobi et, emporté par son animosité contre Gauss, il se livre contre lui à des attaques très dures; il tient pour incroyable que quelqu'un ait pu faire des découvertes d'une telle importance sans avoir songé à les publier.

Mais il doit être clair pour quiconque s'est occupé en détail de la nouvelle théorie, que Gauss, en effet, avait obtenu depuis bien des années une connaissance profonde de la théorie des fonctions elliptiques, et cette remarque dans la Section VII des *Disquisitiones Arithmeticæ*, que le principe sur lequel repose la division de la circonférence en parties égales est applicable aussi à la lemniscate, et depuis le premier grand Mémoire d'Abel à des questions plus générales encore, est, pour citer les paroles de Dirichlet dans son *Éloge de Jacobi* « un témoignage irrécusable que, devançant de beaucoup son époque, Gauss, dès le commencement du siècle, avait reconnu le principe de la double périodicité ».

Gauss, il est vrai, ne s'est jamais décidé à publier *in extenso* ses vastes recherches sur les fonctions elliptiques; ce n'est qu'en deux occasions qu'il a communiqué des résultats isolés appartenant à ce domaine : une fois en 1808, dans le Mémoire *Summatio quarumdam serierum singularium*, et d'ailleurs sans indiquer que les séries et produits étudiés ici appartiennent à la théorie des fonctions elliptiques; puis (1818) dans le Travail *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datæ exerceret planeta...*, où est exposée la transformation, *dite* de Gauss, du second degré et son application à l'évaluation des intégrales elliptiques de première et seconde espèces.

Abstraction faite de ces recherches, nous ne possédons de travaux de Gauss sur les fonctions elliptiques que dans son œuvre posthume et pour la plupart sous forme de formules sans texte, de sorte que le plus souvent nous sommes réduits à conjecturer la marche des déductions.

Nous devons, sans aucun doute, regarder comme étant les premières recherches sur ces sujets celles qui ont trait à la moyenne arithmético-géométrique. D'après une assertion de Gauss citée par M. Schering, dès 1794, c'est-à-dire à l'âge de 17 ans, il connaissait les rapports entre la moyenne arithmético-géométrique et les séries de puissances dont

les exposants sont les nombres carrés; en d'autres termes le développement de l'intégrale complète de première espèce K suivant les puissances de la grandeur q qui se présente dans les fonctions $\mathfrak{S}$ correspondantes.

On sait que l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique est en corrélation des plus intimes avec la transformation du second degré des fonctions elliptiques, en ce sens que cet algorithme permet de déterminer la chaîne des modules correspondants: en effet, le complément du second module de la chaîne est égal au quotient des moyennes arithmétique et géométrique entre 1 et le complément du premier module. Celui qui découvrit le premier cette transformation, Landen, et qui la publia en 1775, n'avait pas d'ailleurs indiqué l'algorithme sous la forme connue; celle-ci est due à Lagrange qui, en 1784, indépendamment de Landen, paraît-il, découvrit de nouveau cette transformation. Chez lui on trouve l'algorithme exposé tout à fait explicitement, ainsi que son application à la détermination de la chaîne des modules.

Jusqu'aujourd'hui, dans les exposés de l'historique des fonctions elliptiques, l'on n'a encore jamais attiré l'attention sur le fait que Gauss a établi l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique en corrélation avec un autre (¹) qui se transforme à l'aide d'une substitution trigonométrique (²) très simple, qui se trouve aussi chez Gauss, en celui de la transformation de Landen. Maintenant si l'on ne veut pas admettre que Gauss ait tout simplement pris cette transformation à Landen ou Lagrange, ou encore dans le Travail de Legendre publié plus tard par ce dernier en 1786, dans les *Mémoires de l'Académie de Paris*, nous ne sommes plus en présence, semble-t-il, que de deux cas possibles : ou bien Gauss de son côté a découvert la transformation, sous la même forme que Landen et Lagrange, en étudiant l'intégrale, puis pour des raisons pratiques l'a transformé en l'algorithme, ou bien il a d'abord découvert l'algorithme de la moyenne arithmé-

(¹) P. 387. Ce chiffre, comme ceux de toutes les notes suivantes, désigne la page dont il s'agit du tome III des *Œuvres* de Gauss.

(²) P. 388, milieu et fin. V, 2V', ... sont les amplitudes directes d'une chaîne de transformations de Landen.

tico-géométrique et, par une heureuse généralisation, a passé de celui-ci au second algorithme d'une manière analogue à celle par laquelle des formes quadratiques on arrive aux formes bilinéaires; en effet, c'est à peu près ainsi que se comportent vis-à-vis les unes des autres les équations des deux algorithmes ([1]). Dans cette dernière hypothèse alors le rapport avec les intégrales elliptiques eût été une conséquence dérivée secondairement des lois de l'algorithme.

Distinguer avec certitude entre ces trois cas possibles est un choix assez difficile à faire, mais on doit surtout avoir ceci présent à l'esprit : la signification de la transformation elle-même ne vient qu'après celle *des conséquences* que Gauss a su tirer des deux algorithmes qui y sont réunis, et si sur ce point on peut peut-être lui refuser d'avoir fait la découverte indépendamment, néanmoins la gloire d'avoir découvert les fonctions elliptiques trente ans avant Abel et Jacobi lui reste intacte pour tout temps.

Les conséquences en question, comme je l'ai déjà indiqué, reposent sur l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique. Celui-ci détermine une série infinie de paires de quantités a, b par cette condition que chaque a soit la moyenne arithmétique et chaque b la moyenne géométrique entre les quantités de la paire précédente. La limite commune vers laquelle convergent les deux séries des a et des b est dite alors la *moyenne arithmético-géométrique* entre les quantités de la première paire et naturellement aussi de chaque paire suivante.

D'après une remarque déjà faite, il résulte que tous les quotients $\frac{b}{a}$ peuvent être regardés comme les modules complémentaires k' d'une chaîne de transformations de Landen. Si l'on désigne maintenant les modules mêmes correspondants k par $\frac{c}{a}$, l'on aura ainsi défini une troisième série infinie de quantités c qui possède avec les deux premières séries une relation facile à reconnaître. On est aussi conduit à considérer en même temps les deux modules compléments l'un de l'autre lorsque, comme le fait Gauss dans un travail posthume ([2]) de

([1]) C'est M. Weierstrass qui m'a indiqué ce point de vue.

([2]) P. 361-371, en particulier nos 7 et 8.

l'année 1800, l'on établit la corrélation de l'algorithme et des intégrales elliptiques indépendamment de la transformation de Landen. On obtient notamment pour la valeur réciproque de la moyenne arithmético-géométrique entre 1 et k, un développement en série hypergéométrique suivant les puissances de k' qui, d'une part, nous conduit à l'équation linéaire du second ordre bien connue, et d'autre part nous permet de reconnaître que cette valeur est égale à la grandeur $\frac{2}{\pi}K'$, et, de même, que la valeur réciproque de la moyenne arithmético-géométrique entre 1 et k' est égale à $\frac{2}{\pi}K$.

Par suite, dans l'algorithme homogène des quantités a, b, c, le quotient de la moyenne arithmético-géométrique entre a et b divisée par celle entre a et c sera égal à la grandeur $\frac{K'}{K}$ ou $-\frac{1}{\pi}\log q$ ou $\frac{w}{i}$ où l'on a posé $q = e^{w\pi i}$. Le développement en série que donne Gauss [1] pour cette grandeur w fournit directement cette représentation connue de q comme produit infini à l'aide des modules d'une chaîne de transformations du second ordre obtenue par Jacobi [2] dans les *Fundamenta nova* et dans le Mémoire *Sur les formules les plus commodes pour l'évaluation numérique des fonctions elliptiques*.

La pensée qui est à l'origine des déductions de Gauss est maintenant la suivante : toutes les quantités a, b, c, qui se présentent dans l'algorithme, dépendent de deux variables ; l'on prend d'abord les quantités a, b de la première paire, puis les deux moyennes entre a et b d'une part, entre a et c d'autre part, ou plutôt on prend la première moyenne μ et le quotient des deux moyennes, c'est-à-dire la grandeur w ou encore q. Les quotients $\frac{a}{\mu}$, $\frac{b}{\mu}$, $\frac{c}{\mu}$ dépendent seulement de w et sont étudiées [3] par Gauss comme fonctions de cette grandeur. Ce ne sont pas autre chose que les carrés des trois fonctions ϑ_3, ϑ_0, ϑ_2

[1] Page 377, troisième équation à partir d'en haut.

[2] Jacobi, *Œuvres*, t. I, p. 201, 351.

[3] Dans ses recherches sur la moyenne arithmético-géométrique. Gauss *désigne* notre notation q habituelle par y ; et ainsi

$$p(y) = \vartheta_3(0, w), \qquad q(y) = \vartheta_0(0, w), \qquad r(y) = \vartheta_2(0, w).$$

pour la valeur zéro du premier argument, de sorte que la relation qui a lieu entre a, b, c ne représente évidemment pas autre chose que la célèbre équation entre les quatrièmes puissances de ces trois constantes $\mathfrak{S}$. Maintenant, l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique se révèle comme identique à celui qui exprime les trois fonctions $\mathfrak{S}$ paires aux arguments 0, 2ω à l'aide de celles d'arguments 0, ω, par conséquent aussi, comme identique à la transformation du second ordre des fonctions $\mathfrak{S}$ pour la valeur zéro du premier argument.

Les lois de l'algorithme suffisent maintenant pour établir les principales propriétés de ces *nouvelles transcendantes*, comme les appelle Gauss, et avant tout leur représentation à l'aide de ces merveilleux développements en série suivant les puissances de q dont les exposants sont les carrés des nombres ([1]). Ces développements en série fournissent les formules de transformation des constantes $\mathfrak{S}$ pour le changement de q en $-q$ ou de ω en $\omega + 1$ ([2]), tandis que l'on obtient les équations fonctionnelles pour le changement de ω en $\frac{1}{\omega}$ ([3]) en observant que lorsque l'on échange les modules, compléments l'un de l'autre, k et k', le quotient $\frac{K'}{K}$ prend comme valeur sa réciproque. Ici se trouve l'origine de la transformation linéaire des fonctions $\mathfrak{S}$. Gauss distingue d'ailleurs encore explicitement les six cas que l'on sait ([4]). A l'endroit cité se trouve une indication assez obscure sur la corrélation entre les nouvelles transcendantes et les formes quadratiques à déterminant négatif, allusion sur laquelle, longtemps après, les recherches de M. Kronecker ont porté le jour le plus clair.

On trouve ([5]) encore, dans ces notations, l'équation différentielle bien connue du troisième ordre, traitée plus tard par Jacobi, qui est vérifiée par chacune de ces trois séries $\mathfrak{S}$ comme fonction de q. Elle est établie ici à l'aide des relations différentielles entre les termes de l'algorithme.

---

(1) Page 383.

(2) Page 386, au haut de la page.

(3) Page 385, au bas de la page. Page 386, au haut de la page.

(4) Page 386.

(5) Page 382.

Telles sont, indiquées rapidement, car l'on ne peut guère en cette occasion entrer dans les détails ([1]), les conséquences essentielles tirées par Gauss de l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique. Le principe fondamental, j'y insiste encore, est la considération des éléments de l'algorithme, non dans leur dépendance avec *les premiers termes* de l'algorithme, mais au contraire avec *les valeurs limites* de ce dernier; ainsi sont obtenues par Gauss les trois fonctions $\mathfrak{F}$ pour la valeur o du premier argument, qui, par conséquent, ne sont fonctions que d'un seul argument ϖ.

Le même principe appliqué au second algorithme déjà cité, qui n'est pas autre chose que la transformation de Landen, conduit Gauss à la découverte des fonctions elliptiques générales qui dépendent de deux arguments x, ϖ.

Dans cette transformation de Landen la chaîne des modules est déterminée de la manière indiquée précédemment à l'aide de l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique; la série des amplitudes φ, φ_1, φ_2, ... jouit de cette propriété que les quantités φ, $\frac{\varphi_1}{2}$, $\frac{\varphi_2}{4}$, ... tendent vers une limite déterminée x, qui est égale à l'intégrale elliptique donnée, multipliée par $\frac{\pi}{2K}$; cette grandeur x, ainsi que la grandeur ϖ relative à la chaîne des modules, sont les deux valeurs limites que nous devons considérer dans l'algorithme de la transformation. L'algorithme lui-même consiste en ceci : c'est que les sinus et cosinus de la seconde amplitude ainsi que la quantité que l'on désigne habituellement par Δ pour la seconde amplitude et pour le second module s'expriment rationnellement d'une manière simple à l'aide des trois quantités correspondantes pour la première amplitude et le premier module de la chaîne. Maintenant, si l'on considère la dépendance des éléments de cet algorithme, non directement des valeurs limites, mais en employant le principe déjà indiqué pour l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique d'après lequel on rend les équations homogènes en exprimant les trois grandeurs

---

([1]) C'est-à-dire dans cette occasion où Günther parlait devant la Faculté de Philosophie de l'Université de Berlin. L. L.

$\sin^2$, $\cos^2$ et Δ^2 pour chaque terme de la chaîne de transformations par les quotients de quatre nouvelles quantités α, β, γ, δ, c'est-à-dire par $\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ (¹); alors, dis-je, l'on arrive à l'algorithme donné par Gauss, qui d'ailleurs se transforme en celui de la moyenne arithmético-géométrique, pourvu que l'on égale à zéro les quantités δ, ..., c'est-à-dire les amplitudes, puisqu'alors α, β, γ deviennent identiques aux quantités précédemment désignées par a, b, c.

L'algorithme de Gauss fournit maintenant une représentation des quatre quantités α, β, γ, δ, abstraction faite d'un facteur commun sans importance, sous forme de produits infinis dont les facteurs dépendent seulement des amplitudes et modules de la transformation de Landen (²), si l'on regarde ces produits comme dépendant, non des éléments initiaux φ, k de la transformation, mais des valeurs limites x et ω; alors lesdits produits ne sont pas autre chose que les carrés des quatre fonctions $\mathfrak{S}$ et le nouvel algorithme se révèle comme étant cette transformation du second degré qui exprime les fonctions $\mathfrak{S}$ de $2x$, 2ω par celles de x et ω, et ainsi de suite. Ces représentations des fonctions $\mathfrak{S}$ par des produits à l'aide d'une chaîne de transformation de Landen coïncident complètement avec celles données par Jacobi dans les *Fundamenta nova* et dans le Mémoire déjà cité sur les calculs

---

(¹) Page 388. Comparer note (²), p. 97, du Mémoire actuel.

(²) Ceci repose sur la troisième équation, p. 388 à partir d'en haut, d'après laquelle $\frac{\beta}{b}$ peut être représentée à l'aide de la quantité que Gauss *désigne* par $\frac{k}{K}$, multipliée par un produit infini où se présentent seulement les quotients $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{a}{b}$; il en est alors de même des quantités restantes. Les équations sont, p. 394 en haut,

$$(\alpha = k\mathrm{P}^2, \ldots, \delta = k\mathrm{S}^2, \text{ d'où } y = q = e^{w\pi i}, \ \eta = e^{2ix})$$

et, p. 395 en haut,

$$(\mathrm{Q} = q\sqrt{\Delta}\sqrt[4]{\Delta'}\ldots).$$

Relativement, d'ailleurs, à l'exposé de la déduction des fonctions $\mathfrak{S}$ par Gauss, je n'ai pas abordé la question de savoir si Gauss, ici, n'a eu à l'esprit que des arguments réels, car cette question ne pourra jamais être tranchée rigoureusement.

numériques [1]; exemple frappant de la manière dont Gauss, avec son intuition merveilleuse des applications, considérait toujours avant tout la commodité pour les évaluations numériques.

A l'aide d'artifices simples, notamment certains échanges entre les α, β, γ, δ de l'algorithme, et la recherche des modifications correspondantes dans les valeurs limites, on peut maintenant obtenir les équations fonctionnelles pour les fonctions $\mathfrak{S}$, lorsque l'on augmente des périodes le premier argument [2]. De là résultent, de la manière connue, les séries de Fourier, ou chez Gauss, les développements suivant les puissances de e^{2ix} et de q [3], dont cependant il n'étudie pas la convergence. L'on trouve ensuite, dans ces notations, l'équation aux dérivées partielles des quatre fonctions $\mathfrak{S}$ [4], et cet algorithme qui exprime [5] les fonctions aux arguments x, 2ω, à l'aide de celles aux arguments x, ω, en d'autres termes, la transformation du second degré dite *de Gauss*, telle qu'il l'a publiée dans la *Determinatio attractionis ...;* cet algorithme peut également, à l'aide d'un artifice simple, se tirer de celui de Landen.

L'essentiel dans ces résultats est par conséquent ceci :

Gauss, par l'algorithme de la transformation de Landen, qu'il l'ait trouvé lui-même indépendamment ou qu'il l'ait pris chez d'autres, est conduit à l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce et trouve en même temps dans les lois de l'algorithme le moyen de pénétrer la nature des fonctions qui se présentent alors. Il reconnaît que la limite supérieure z d'une telle intégrale et, de même, que $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-k^2z^2}$ peuvent être représentés comme des quotients dont les numérateurs et le dénominateur commun sont des fonctions de deux arguments, c'est-à-dire de l'intégrale x elle-même et de la

---

(1) Jacobi, *Œuvres*, t. I, p. 204 en haut; p. 357, milieu. Pour reconnaître la coïncidence l'on ne doit pas employer, comme le fait M. Schering au haut de la page 395, les U $''$, mais, comme c'est déjà indiqué dans notre note (2), p. 97, du Mémoire actuel, les V $''$.

(2) Page 396, en haut.

(3) Page 399.

(4) Page 393.

(5) Page 396.

grandeur ϖ. Il expose les propriétés de ces quatre fonctions fondamentales pour la théorie et il en donne les expressions analytiques; mais les démonstrations, au moins dans les manuscrits que nous avons, ne sont pas poussées jusqu'au bout.

Dans ces cahiers de notes qui, vraisemblablement, datent des dernières années du siècle précédent, Gauss se sert donc d'une méthode qui n'a rien de commun avec les méthodes de ceux qui ont travaillé plus tard à cette théorie. Mais ceci n'est pas resté pour lui l'unique accès aux fonctions elliptiques.

Nous avons aussi des notes datant de l'année 1799, sous le titre : *Varia, imprimis de integrali* $\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin^2 u}}$ (¹).

Ici Gauss, entre autres choses, donne le développement en série de Fourier de sin am, ainsi que des fonctions ϑ_0, ϑ_1, dont le quotient représente cette fonction, ensuite les produits infinis pour ϑ_0, ϑ_1, le tout sous la même forme qu'Abel et Jacobi, bien que dans d'autres notations. Les formules se suivent sans aucun texte qui les relie, et il serait très difficile de pouvoir se former une opinion sur la manière dont Gauss a pu obtenir ces résultats, si lui-même n'avait expressément remarqué dans ses Lettres à Bessel et à Crelle, qu'Abel dans ses *recherches* (1827) avait « enfilé précisément la même route dont il (Gauss) était sorti en 1798 », époque par conséquent où les recherches de Gauss dont il s'agit ici étaient déjà pour la plus grande partie terminées, puisque la remarque susdite ne peut être relative à d'autres Notes sur la Théorie générale. Nous aurions donc à supposer que Gauss, après avoir été amené, par les considérations que nous avons exposées, à la conception de l'inversion, aurait presque aussitôt reconnu l'importance extrême du théorème d'Euler pour les nouvelles transcendantes et se serait efforcé de l'employer, pour édifier la théorie, de la même manière que le fit plus tard Abel.

Et le fait que Gauss ne fait allusion en aucun endroit au théorème d'addition pour les fonctions elliptiques générales n'est d'aucun poids, en présence des communications faites à Crelle et Bessel. Du reste,

---

(¹) P. 443 et suiv., où $S\Psi\varpi = S\varphi = \sin \mathrm{am}(\varphi, \mu i)$; et où à peu de chose près $T = \vartheta_1$, $\varpi = \vartheta_0$.

dans les papiers laissés par Gauss, l'on ne trouve non plus aucune trace de maintes recherches que Gauss a, sans aucun doute, menées à bonne fin et qu'il a communiquées à d'autres. A ce propos, je rappellerai seulement ses recherches sur les intégrales de fonctions d'une variable complexe, au sujet desquelles il a fait de si intéressantes communications à Bessel dans sa correspondance, et encore la théorie générale de la division de la lemniscate à laquelle il fait allusion dans l'endroit déjà cité des *Disquisitiones Arithmeticæ*.

Dans ces recherches de l'an 1789, nous avons donc *un traitement de la théorie complètement différent de celui que nous avons indiqué au commencement de cet article*. Gauss d'ailleurs a, semble-t-il, fait usage de la même méthode dans son étude des *fonctions lemniscatiques* (¹), sujet dont il commence l'étude en 1797, comme l'indique une note de sa main; et cette circonstance est bien propre à servir d'appui à l'opinion que nous avons tout à l'heure énoncée.

Gauss commence la théorie des fonctions lemniscatiques, après la définition des fonctions sin lemn, cos lemn, en exposant le théorème de l'addition, dont sont ensuite tirées les premières formules de la multiplication. Ensuite (²) vient la détermination de ces fonctions comme quotients de séries de puissances, qu'il affirme expressément être toujours convergentes. Ces fonctions sont précisément, particularisées dans le cas en question, les fonctions Al de M. Weierstrass. Ces fonctions sont aussi représentées par Gauss (³), comme produits simplement infinis, sous la forme trigonométrique connue qui met en évidence les zéros, et à ce propos il ajoute cette remarque : « Id quod rigorose demonstrare possumus. » Relativement à ceci, nous n'avons pas besoin de supposer, comme il a été déjà fait (⁴), que Gauss possédait déjà les théorèmes généraux sur la représentation des fonctions uniformes par des produits infinis; cette remarque a trait, semble-t-il, plutôt à la démonstration de l'identité des séries trigonométriques, trouvées pour les fonctions $\mathfrak{S}$, et des produits.

(¹) P. 404 et suiv.

(²) P. 405, bas; 406, haut de la page.

(³) P. 415 et suiv.

(⁴) Kœnigsberger, *Historique des fonctions elliptiques, de 1826 à 1829*. Teubner.

Gauss donne ensuite en cet endroit les développements de Fourier pour les numérateurs et dénominateurs de sin lemn et cos lemn, ainsi que pour ces dernières fonctions ([1]), et encore la décomposition de ces dernières en éléments simples (Partialbrüche) ([2]). Enfin l'on trouve encore un nombre de formules pour la multiplication complexe ([3]) (déduites du théorème d'addition), puis des développements en série et en produits pour les périodes ([4]) et des formules pour la quintisection ([5]), obtenues au moyen de la moyenne arithmético-géométrique, formules qui sont certainement en rapport avec la théorie générale de la division à laquelle Gauss fait allusion dans les *Disquisitiones*.

Mais Gauss ne s'est pas contenté de pénétrer profondément dans la théorie des fonctions elliptiques à l'aide des deux méthodes par lesquelles il était arrivé aux résultats que nous avons cités jusqu'ici. Il avait représenté ses nouvelles transcendantes, les fonctions $\mathfrak{S}$, d'une part comme séries infinies, d'autre part comme produits infinis, et la corrélation remarquable ainsi obtenue entre ces expressions analytiques de nature diverse l'engagea à chercher une démonstration directe des équations en question et à établir sur ces principes une théorie de ses fonctions; il n'a du reste pas mené jusqu'à terme ce dernier point.

Gauss, dans les recherches de 1798, que nous avons indiquées, éprouve déjà le besoin d'une démonstration directe pour les identités qui ont lieu entre ces séries et produits infinis ([6]). Il est ensuite revenu sur ce point qui, jusqu'alors, n'était pas encore complètement élucidé, dans des Notes nombreuses datant de 1808, 1809 ([7]). La question est traitée par lui avec le plus d'extension dans le fragment

---

([1]) P. 418 et suiv.

([2]) P. 417.

([3]) P. 411.

([4]) P. 420, p. 424.

([5]) P. 421.

([6]) P. 434, au bas de la page.

([7]) P. 440 vers la fin. x à partir d'ici représente toujours ce que nous désignons par q, et y est notre e^{2ix}; cette équation est la représentation par un produit de $\mathfrak{S}_3$; plus loin, voir encore équations (6), (7), (9), p. 446 et 447.

intitulé : *Cent théorèmes sur les nouvelles transcendantes* (¹), dont nous savons seulement qu'il ne remonte pas plus loin que 1818, vu que le Mémoire *Determinatio attractionis* ... y est cité; Gauss part ici d'une somme finie et la transforme en un produit; le passage à l'infini lui fournit alors directement deux relations entre les séries infinies et les produits.

L'on ne peut nier que ce procédé de Gauss manque de cette simplicité qui distingue, par exemple, les démonstrations d'identité de Jacobi et de Cauchy, où l'on sait que la marche inverse, qui paraît plus naturelle, part du produit fini pour aboutir à la somme finie.

Que Gauss eût en vue de baser sur cette démonstration d'identité une théorie de ses fonctions, c'est ce qui résulte déjà de toute la méthode d'exposition du fragment cité; ainsi, par exemple, comme conséquence évidente du théorème suit cette remarque (²) : « Les fonctions qui sont, à l'aide de ces deux théorèmes, développées en produits infinis, sont de la plus haute importance, et il serait bon de les désigner ici par un symbole fonctionnel particulier. » Ces fonctions sont précisément nos $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$; ensuite Gauss introduit $\mathfrak{F}_0$ en remplaçant ϖ par $\varpi+1$ dans $\mathfrak{F}_3$. Il considère alors les développements en produits et en séries de ces trois fonctions pour les arguments o, ϖ, d'une part, et pour les arguments o, 2ϖ, d'autre part; l'on obtient ainsi des relations identiques (³) qui fournissent la transformation du second degré des constantes thêta et en même temps se présente ainsi à un nouveau point de vue la corrélation avec la moyenne arithmético-géométrique. Le fragment se termine (⁴) par l'établissement de l'expression déjà citée de q à l'aide des modules de cette chaîne de transformations du second degré.

La méthode que Gauss emploie dans les dernières Notes citées, ainsi d'ailleurs que dans d'autres que nous possédons (qui recommencent de nouveau à partir de 1827), peut être désignée sous le nom de la *méthode des identités*. Le principe est toujours le même : des équa-

---

(¹) P. 461 et suiv.
(²) P. 465.
(³) P. 466.
(⁴) P. 467.

tions identiques entre produits infinis ou sommes, déduire les relations entre fonctions thêta.

Relativement à cette méthode, de même que relativement aux précédentes, les travaux de Gauss ont de nombreux points de contact avec d'autres recherches et notamment avec des études plus modernes. En effet, par exemple, les démonstrations pour les théorèmes d'addition et pour les équations de transformation des fonctions ϑ se ramènent toujours à de pareilles identités; il s'agit pour cela seulement de les faire précéder de principes intuitifs généraux (heuristische). Tels sont en particulier les principes : 1° de *la décomposition en facteurs des produits infinis*, en particulier à l'aide du théorème de Cotes, principe dont l'emploi est devenu bien connu par l'usage qu'en ont fait Abel et Jacobi pour établir les équations de la transformation; 2° du *théorème de M. Hermite* qui nous dit qu'entre $r+1$ fonctions thêta dites d'ordre r, doit toujours avoir lieu une équation linéaire homogène à coefficients constants; ce théorème a son application ici dans l'établissement des identités entre *les séries* ϑ.

De ces deux principes il n'est pas douteux que Gauss, bien qu'il n'ait pas fait usage du théorème de Cotes, a employé le premier, comme il résulte de beaucoup d'ébauches de démonstrations ([1]). Quant au second principe, l'on pourrait peut-être soupçonner, d'après la forme de démonstration donnée pour certaines relations thêta, que Gauss le connaissait, au moins en partie, sinon en toute sa généralité. Il remarque notamment en un endroit ([2]) que le produit

$$\vartheta_3(x+y, w)\vartheta_3(x-y, w)$$

peut s'exprimer en fonction linéaire et homogène de $\vartheta_3(2x, 2w)$ et $\vartheta_2(2x, 2w)$ à coefficients qui ne dépendent que de y seul, et il détermine ces derniers en portant dans l'équation des valeurs spéciales; la démonstration par conséquent est donc pareille à celle que l'on emploie d'habitude aujourd'hui. Quant au principe même, il n'est nulle part

---

([1]) P. 466, en haut; p. 470 [2] entre autres.

([2]) P. 457, équation [69], on posera $x = q = e^{2\pi i w}$, $y = e^{2ix}$, $(x, y) = \vartheta_3(x, w)$, $z = e^{2iy}$.

énoncé par Gauss; nous devons donc laisser ouverte la question de savoir s'il a trouvé les résultats dont il s'agit ici à l'aide d'autres principes ou encore par intuition.

Cette méthode des identités s'étend non seulement aux théorèmes d'addition des fonctions ϑ, où l'équation de Gauss citée peut être employée comme point de départ suffisant, mais encore, ainsi qu'il a été déjà remarqué, à la théorie de la transformation. Nous trouvons ici chez Gauss, outre la transformation du premier [1] ordre et du second ordre [2], aussi celles des troisième [3], cinquième [4] et septième [5] ordre des fonctions ϑ. Au lieu des équations modulaires, il donne toujours seulement les équations homogènes pour les constantes ϑ où q a été remplacé par q^n [6], ce dont on peut aisément déduire les équations modulaires. En un endroit [7] il donne aussi pour chaque degré impair de transformation toutes les racines des équations correspondantes; ici apparaissent les constantes ϑ correspondant à $\sqrt[n]{q}$ et Gauss ajoute que l'on pourrait aisément trouver les coefficients des équations au moyen du développement en séries des constantes ϑ suivant les puissances de q.

Outre les résultats que nous avons exposés, nous trouvons encore dans ces derniers cahiers de notes, qui de même que les précédents sont le plus souvent composés de formules sans texte qui les relie, de nombreuses propositions accidentelles ou intercalations; je citerai entre autres une seconde déduction où est établie l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfont les trois fonctions $\vartheta_h(0, \varpi)$, faite à l'aide des développements en produits [8], et encore une remarque [9]

---

(1) P. 441. Chose singulière, c'est seulement un cas particulier qui est traité ici.

(2) P. 471 et suivantes.

(3) P. 471, 459 et suivantes.

(4) P. 476 et suivantes.

(5) P. 474.

(6) P. 441 et suivantes, p. 456, 475 et suivantes, p. 478 et suivantes.

(7) P. 476.

(8) P. 445.

(9) P. 478. En toute exactitude, on a la formule $\left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^2 = \frac{\vartheta_0^2(0, \varpi)}{\vartheta_3^2(0, \varpi)} - k'$. Com-

relative à la considération de la grandeur ω comme fonction de k, qui nous dit qu'à chaque valeur de k correspond *toujours une seule et unique* valeur ω à l'intérieur d'une certaine partie du plan des ω, à l'intérieur du polygone fondamental, dirions-nous aujourd'hui.

Résumons maintenant rapidement les principaux résultats de notre étude. Nous avons vu que Gauss, dès la fin du dernier siècle, avait été conduit, au moyen de l'algorithme de la transformation de Landen, à représenter l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce à l'aide des quatre fonctions ϑ, ainsi qu'à développer les propriétés essentielles de ces nouvelles transcendantes. Il ne pouvait lui échapper quelle portée fondamentale sur les fonctions inverses a le théorème d'addition d'Euler pour les intégrales, et ceci l'engagea à pénétrer plus profondément dans la nature de ces fonctions par un second chemin, chemin par lequel Abel entra dans ce domaine environ trente ans plus tard. Les merveilleuses relations entre les sommes et produits infinis, qui sont fournies à l'aide de la représentation des fonctions ϑ par des produits, conduisent enfin Gauss à une troisième manière de traiter cette théorie par la méthode que j'ai nommée dans mon exposé, celle des *identités;* parmi les résultats de cette dernière recherche, il faut citer, en particulier, ceux qui sont relatifs à la théorie de la transformation.

Ainsi Gauss, et cela en partie au moyen d'une méthode qui par son originalité singulière nous intéresse au plus haut degré, s'était créé, plusieurs dizaines d'années environ avant Abel et Jacobi, une théorie étendue des fonctions elliptiques qui renfermait une partie des résultats les plus importants énoncés plus tard par ces géomètres. En effet, des domaines vastes et étendus de cette théorie, ce n'est à proprement parler que les recherches plutôt algébriques qui sont relatives au théorème d'Abel qui lui sont restées étrangères; mais bien plus, la théorie de Gauss renferme encore, comme nous l'avons vu, en différents endroits les points de départ de recherches plus étendues que la postérité seule a su mener à terme.

Si nous réfléchissons à l'immense portée des découvertes de Gauss,

---

parer le Mémoire de Dedekind (*Journal de Crelle*, t. 83), *Sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques.*

importance qui ne pouvait certes échapper à leur auteur, il paraît au plus haut degré extraordinaire qu'il ait pu penser à cacher ces trésors à ses contemporains, surtout après qu'Abel et Jacobi par leurs travaux lui eussent enlevé la priorité pour une partie des résultats. Nous devons en chercher la raison, d'après une opinion de Wilhelm Weber que M. Weierstrass a bien voulu me communiquer, dans ce fait que Gauss ne voulait jamais commencer la publication de ses recherches avant d'avoir complètement relié entre elles en un accord parfait toutes les diverses méthodes qui lui avaient donné accès à la théorie. Et cette opinion correspond absolument à tous les principes de Gauss relativement à la publication de travaux. Néanmoins nous ne pensons pas nous avancer trop loin en regardant cette première découverte de la théorie des fonctions elliptiques et le fait de sa non-publication comme un des événements les plus surprenants et les plus merveilleux de toute l'histoire des Mathématiques.

Notice sur Paul Günther, Professeur à l'Université de Berlin (1867-1891).

Paul Günther, un des plus brillants élèves de MM. Kronecker, Weierstrass et Fuchs, publia, dès l'âge de 20 ans, dans le *Journal de Crelle*, des Mémoires très remarquables sur la Théorie des fonctions elliptiques et celle des équations différentielles linéaires. Le Mémoire ici traduit a été lu (1890) devant la Faculté de Philosophie de l'Université de Berlin à l'occasion de son *Habilitation*. Il allait entreprendre sur le même sujet un grand travail *in extenso*, à l'invitation de M. Weierstrass, qui fondait sur son élève les plus hautes espérances; malheureusement Günther fut enlevé à ses amis et à la Science par une mort prématurée, à l'âge de 24 ans. Une courte biographie a été publiée par M. Gutzmer dans le *Zeitschrift* de MM. Schlömilch et Cantor, t. XXXVII, p. 46-49, sous le titre *Zur Erinnerung an Paul Günther*. Plusieurs autres Mémoires ont été publiés après sa mort dans le *Journal de Crelle* par les soins de son beau-frère, M. Gutzmer, professeur à l'Université de Halle, et de M. Stæckel, professeur à l'Université de Kœnigsberg.

L. L.

Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé;

PAR M. RAOUL BRICARD.

I.

M. C. Stephanos a posé, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ([1]), la question suivante :

« Existe-t-il des polyèdres à faces invariables susceptibles d'une infinité de transformations avec altération seulement des angles solides et des dièdres? »

J'ai fait connaître dans le même Recueil ([2]) un octaèdre concave particulier possédant la propriété dont il s'agit. Cauchy, d'autre part, a démontré ([3]) qu'il n'existe pas de polyèdre *convexe* déformable dans les conditions prescrites.

Je me propose dans le présent Mémoire d'étendre le résultat rappelé ci-dessus, en résolvant dans sa généralité le problème de M. Stéphanos pour les octaèdres à faces triangulaires.

D'après le théorème de Cauchy, tous les octaèdres dont j'établirai la déformabilité seront nécessairement concaves, en entendant par là qu'ils possèdent des angles dièdres rentrants, ou bien des faces qui

---

([1]) T. I, p. 228.

([2]) T. II, p. 243.

([3]) *Journal de l'École Polytechnique*, XVIe Cahier; 1813. (*Deuxième Mémoire sur les polygones et les polyèdres.*)

s'entrecroisent, à la manière des faces des polyèdres d'espèces supérieures.

II.

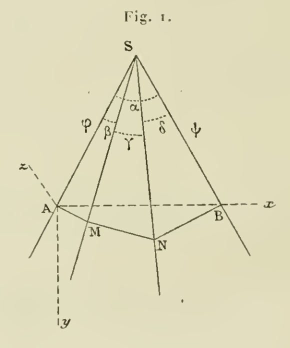
Je commencerai par établir quelques propriétés relatives à la déformation d'un *angle tétraèdre* dont les quatre faces restent invariables, déformation analogue à celle du quadrilatère articulé dans le plan.

Soit (*fig.* 1) l'angle tétraèdre SABNM, articulé suivant ses quatre arêtes, et ayant pour faces de grandeurs invariables

$$\text{ASB} = \alpha, \quad \text{ASM} = \beta, \quad \text{MSN} = \gamma, \quad \text{NSB} = \delta \quad (0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi),$$

cherchons la relation qui relie, pendant la déformation dont cet angle solide est évidemment susceptible, les dièdres $\text{SA} = \varphi$ et $\text{SB} = \psi$.

Fig. 1.



On peut supposer que la face ASB conserve une position fixe. Nous rapporterons dès lors le système à trois axes de coordonnées rectangulaires, définis ainsi qu'il suit : l'origine sera placée en un point A de l'arête SA, tel que $\text{SA} = 1$. Les axes $\text{A}x$ et $\text{A}y$ seront respectivement parallèles aux bissectrices extérieure et intérieure de l'angle ASB, et dirigés de manière que le point S ait une ordonnée négative, et le point B une abscisse positive. Le sens des z positifs pourra être pris arbitrairement.

Ces axes étant ainsi choisis, les points M et N, appartenant aux arêtes SM et SN, et tels que les angles SAM, SBN soient droits, ont respectivement pour coordonnées

$$
M \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \operatorname{tang}\beta \cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi, \\ y_1 &= \operatorname{tang}\beta \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi, \\ z_1 &= \operatorname{tang}\beta \sin\varphi, \end{aligned} \right. \qquad N \left\{ \begin{aligned} x_2 &= 2\sin\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tang}\delta\cos\frac{\alpha}{2}\cos\psi, \\ y_2 &= \operatorname{tang}\delta \sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi. \\ z_2 &= \operatorname{tang}\delta \sin\psi. \end{aligned} \right.
$$

Égalons la valeur de $\overline{MN}^2$ qui résulte de ces expressions à celle que fournit la considération du triangle SMN, il vient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\delta} - \frac{2\cos\gamma}{\cos\beta\cos\delta} \\
&\quad = \left(\operatorname{tang}\beta\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi + \operatorname{tang}\delta\cos\frac{\alpha}{2}\cos\psi - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\operatorname{tang}\beta\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi - \operatorname{tang}\delta\sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi\right)^2 \\
&\qquad + (\operatorname{tang}\beta\sin\varphi - \operatorname{tang}\delta\sin\psi)^2,
\end{aligned}
$$

et, après réductions,

$$
\begin{aligned}
&\sin\beta\sin\delta\cos\alpha\cos\varphi\cos\psi - \sin\beta\sin\delta\sin\varphi\sin\psi \\
&\quad - \sin\alpha\sin\beta\cos\delta\cos\varphi - \sin\alpha\sin\delta\cos\beta\cos\psi \\
&\qquad + \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\cos\delta = 0.
\end{aligned}
$$

Introduisons à présent les variables

$$
t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \qquad \text{et} \qquad u = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.
$$

On a

$$
\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2},
$$
$$
\cos\psi = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin\psi = \frac{2u}{1+u^2}.
$$

Nous parviendrons ainsi à la relation, que j'appellerai *équation de*

l'angle tétraèdre,

$$(1) \qquad A t^2 u^2 + B t^2 + 2 C t u + D u^2 + E = 0,$$

en posant

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \sin\beta \sin\delta \cos\alpha + \sin\beta \cos\delta \sin\alpha + \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ &\qquad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ &= \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \delta), \\ B &= - \sin\beta \sin\delta \cos\alpha + \sin\beta \cos\delta \sin\alpha - \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ &\qquad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ &= \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta - \delta), \\ C &= - 2 \sin\beta \sin\delta, \\ D &= - \sin\beta \sin\delta \cos\alpha - \sin\beta \cos\delta \sin\alpha + \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ &\qquad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ &= \cos\gamma - \cos(\alpha - \beta + \delta), \\ E &= \sin\beta \sin\delta \cos\alpha - \sin\beta \cos\delta \sin\alpha - \sin\delta \cos\beta \sin\alpha \\ &\qquad - \cos\alpha \cos\beta \cos\delta + \cos\gamma \\ &= \cos\gamma - \cos(\alpha - \beta - \delta). \end{aligned} \right.$$

Il était facile de prévoir la forme de la relation (1).

En effet, à une valeur déterminée de $t = \tang\frac{\varphi}{2}$ correspond une position unique de la face ASM, l'angle φ étant alors déterminé à un multiple près de 2π. Cette face étant ainsi fixée, la construction de l'angle tétraèdre peut être achevée de deux manières : il existe en effet deux positions de la droite SN, symétriques par rapport au plan BSM et telles que l'on ait

$$\text{angle MSN} = \gamma, \qquad \text{angle BSN} = \delta.$$

A chaque position de la face BSN correspond une seule valeur de la variable u. Ainsi la relation qui relie t et u doit être du second degré par rapport à u.

Pour la même raison, elle doit être du second degré par rapport à t. Enfin il est visible que si cette relation est satisfaite par les valeurs t, u, elle l'est également par les valeurs $-t$ et $-u$. Elle est donc nécessairement de la forme (1).

Cas de décomposition de l'équation (1). — Nous venons de voir qu'à une valeur de t correspondent deux valeurs de u. Il est utile de rechercher dans quel cas la relation (1) se décompose, de manière que ces valeurs de u soient fonctions rationnelles de t.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le polynome

$$C^2t^2-(At^2+D)(Bt^2+E)=-ABt^4+(C^2-AE-BD)t^2-DE,$$

qui figure sous le radical entrant dans l'expression de u en fonction de t, soit un carré parfait. Or cela peut arriver de deux manières.

1° On a

$$(C^2-AE-BD)^2-4ABDE=0.$$

On trouve, par un calcul qui ne présente pas de difficultés, que le premier membre de cette égalité se réduit à l'expression

$$16\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta.$$

Cette condition ne pourrait donc être remplie que si l'un des angles α, β, γ, δ se réduisait à 0 ou à π, ce qui est impossible.

Il semblerait tout d'abord que ce cas se présente quand le sommet S s'éloignant à l'infini, l'angle tétraèdre dégénère en un faisceau prismatique. Mais alors il faut observer que les valeurs des coefficients A, B, C, D, E, se réduisent toutes à 0, et les raisonnements précédents ne s'appliquent plus. Toute section droite du faisceau prismatique est un quadrilatère plan articulé, dont la déformation est régie par une équation de même forme que l'équation (1) :

$$A't^2u^2+B't^2+2C'tu+D'u^2+E'.$$

Les coefficients A′, B′, C′, D′, E′ ont, en fonction des côtés a, b, c, d du quadrilatère, des expressions qu'on tirera aisément des valeurs

de A, B, C, D, E, en faisant tendre, dans ces dernières, les angles α, β, γ, δ vers zéro, de manière qu'on ait

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\delta}{d}.$$

On verra alors que la condition

$$(C'^2 - A'E' - B'D')^2 - 4A'B'D'E' = 0$$

entraînerait l'égalité impossible

$$abcd = 0.$$

2° On a

$$AB = 0 \qquad \text{avec} \qquad DE = 0.$$

Ces relations entraînent l'un des groupes suivants d'égalités :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} B = 0, & E = 0, \\ A = 0, & D = 0, \\ B = 0, & D = 0, \\ A = 0, & E = 0. \end{array} \right.$$

Considérons par exemple les égalités

$$A = 0, \qquad D = 0.$$

Il en résulte : soit

$$\gamma = \alpha + \beta + \delta + 2k\pi \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \alpha - \beta + \delta + 2k'\pi,$$

soit

$$\gamma = \alpha + \beta + \delta + 2k\pi \qquad \text{avec} \qquad \gamma = -\alpha + \beta - \delta + 2k'\pi,$$

soit

$$\gamma = -\alpha - \beta - \delta + 2k\pi \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \alpha - \beta + \delta + 2k'\pi,$$

soit

$$\gamma = -\alpha - \beta - \delta + 2k\pi \qquad \text{avec} \qquad \gamma = -\alpha + \beta - \delta + 2k'\pi.$$

Le premier couple de relations est incompatible avec les hypothèses faites sur la grandeur des angles α, β, γ, δ. On en tire, en effet,

$$\beta + (k - k')\pi = 0,$$

ce qui est impossible.

En examinant les autres couples, on voit que seul le troisième est admissible et qu'il a pour conséquences nécessaires

$$\alpha + \delta = \pi, \qquad \beta + \gamma = \pi.$$

On raisonnera de même sur les autres égalités (3). Je les écris de nouveau, en mettant à côté de chacune d'elles la relation qu'elle entraîne entre les faces de l'angle tétraèdre :

$$\begin{array}{llll}
B = 0, & E = 0, & \delta = \alpha, & \gamma = \beta, \\
A = 0, & D = 0, & \delta = \pi - \alpha, & \gamma = \pi - \beta. \\
B = 0, & D = 0, & \delta = \beta, & \gamma = \alpha, \\
A = 0, & E = 0, & \delta = \pi - \beta. & \gamma = \pi - \alpha.
\end{array}$$

Nous sommes ainsi amenés à reconnaître deux cas de décomposition de l'équation (1) :

1° L'angle tétraèdre a ses faces adjacentes égales ou supplémentaires deux à deux. Son équation se réduit à

$$At^2u + 2Ct + Du = 0,$$

ou

$$Bt^2 + 2Ctu + E = 0$$

(en supprimant dans la première le facteur

$$u = 0$$

qui correspond au cas sans intérêt où les faces adjacentes de l'angle tétraèdre restent deux à deux en coïncidence pendant la déformation).

Je dirai qu'un angle tétraèdre de cette nature est *rhomboïde*.

2° L'angle tétraèdre a ses faces opposées égales ou supplémentaires

deux à deux. Son équation est alors

$$At^2u^2 + 2Ctu + E = 0$$

ou

$$Bt^2 + 2Ctu + Du^2 = 0.$$

Ces équations s'écrivent respectivement, en ayant égard aux valeurs de leurs coefficients,

$$[\cos\alpha - \cos(\alpha + 2\beta)]\,t^2u^2 - 4\sin^2\beta\, tu + \cos\alpha - \cos(\alpha - 2\beta) = 0,$$

ou

$$\sin(\alpha + \beta)t^2u^2 - 2\sin\beta\, tu - \sin(\alpha - \beta) = 0$$

et

$$[\cos(\alpha + 2\beta) - \cos\alpha]\,t^2 - 2\sin^2\beta\, tu + [\cos(\alpha - 2\beta) - \cos\alpha]\,u^2 = 0,$$

ou

$$\sin(\alpha + \beta)t^2 + 2\sin\beta\, tu - \sin(\alpha - \beta)u^2 = 0.$$

Elles se décomposent, la première en

$$(4)\qquad tu = \frac{\sin\beta + \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}},$$

et

$$(4')\qquad tu = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\dfrac{\beta - \alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}};$$

la seconde, en

$$(5)\qquad \frac{t}{u} = \frac{-\sin\beta + \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}}$$

et

$$(5')\qquad \frac{t}{u} = \frac{-\sin\beta - \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Il n'est pas inutile de résumer la discussion précédente : on peut distinguer trois espèces d'angles tétraèdres articulés :

1° L'angle tétraèdre *général* dont les faces n'ont pas de relations particulières. Son équation est irréductible, de sorte qu'à chaque valeur d'une des variables t, u correspondent deux valeurs de l'autre variable, qui ne sont pas fonctions rationnelles de la première;

2° L'angle tétraèdre *rhomboïde*. A une valeur de t correspond une seule valeur de u, qui en est fonction rationnelle, mais la réciproque n'est pas vraie;

3° L'angle tétraèdre à faces opposées *égales ou supplémentaires deux à deux*. A une valeur de t correspond une seule valeur de u, et réciproquement.

III.

L'équation (1) contenant quatre paramètres arbitraires, toute équation de la même forme

$$A t^2 u^2 + B t^2 + 2 C t u + D u^2 + E = 0$$

peut être considérée comme définissant la déformation d'un angle tétraèdre articulé.

Les éléments de cet angle tétraèdre sont donnés par les relations

$$\frac{\cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \delta)}{A} = \frac{\cos\gamma - \cos(\alpha + \beta - \delta)}{B} = \frac{-2\sin\beta\sin\delta}{C}$$
$$= \frac{\cos\gamma - \cos(\alpha - \beta + \delta)}{D} = \frac{\cos\gamma - \cos(\alpha - \beta - \delta)}{E},$$

d'où l'on tire

$$\frac{-2\sin\beta\sin\delta}{C} = \frac{4\sin\beta\sin\delta\cos\alpha}{A - B - D + E} = \frac{4\sin\delta\cos\beta\sin\alpha}{A - B + D - E}$$
$$= \frac{4\sin\beta\cos\delta\sin\alpha}{A + B - D - E} = \frac{4(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\cos\delta)}{A + B + D + E}.$$

On a, par suite :

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{A - B - D + E}{2C}, \qquad \tang\beta = \dfrac{-2C\sin\alpha}{A - B + D - E}, \\ \tang\delta = \dfrac{-2C\sin\alpha}{A + B - D - E}, \\ \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta\cos\delta - \dfrac{A + B + D + E}{2C}\sin\beta\sin\delta, \end{cases}$$

formules qui permettent de calculer successivement les angles α, β, δ, γ. Il faut, bien entendu, que certaines conditions de réalité soient satisfaites; elles sont fort compliquées et il serait sans intérêt de les écrire.

Comme on peut supposer

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi,$$

les formules précédentes définissent seulement *deux* systèmes de valeurs pour ces angles (en écartant le deuxième cas de décomposition auquel je reviendrai tout à l'heure). On voit immédiatement que si l'un des systèmes est formé des valeurs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta,$$

celles de l'autre système sont

$$\alpha, \quad \pi - \beta, \quad \gamma, \quad \pi - \delta.$$

Il résulte de là un théorème qui nous sera fort utile dans la suite :

Si deux angles tétraèdres articulés T *et* T_1 *peuvent se déformer de telle manière que deux dièdres adjacents de* T *soient constamment égaux ou supplémentaires à deux dièdres adjacents de* T_1, *ces angles tétraèdres ont leurs faces deux à deux égales ou supplémentaires.*

Conservons les notations précédentes pour les éléments de l'angle tétraèdre T et désignons les éléments correspondants de T_1 par les mêmes lettres affectées d'un indice. Le théorème présente trois cas qui s'établissent tous de la même manière.

Supposons, par exemple, que l'on ait constamment

$$\varphi = \varphi_1, \qquad \psi = \pi - \psi_1,$$

d'où

$$t_1 = t, \qquad u_1 = \frac{1}{u}.$$

On a, pendant la déformation de T_1, la relation

$$A_1 t_1^2 u_1^2 + B_1 t_1^2 + 2 C_1 t_1 u_1 + D_1 u_1^2 + E_1 = 0.$$

Si l'on y remplace t_1 et u_1 respectivement par t et $\frac{1}{u}$, il vient

$$A_1 \frac{t^2}{u^2} + B_1 t^2 + 2 C_1 \frac{t}{u} + D_1 \frac{1}{u^2} + E_1 = 0,$$

ou

$$B_1 t^2 u^2 + A_1 t^2 + 2 C_1 tu + E_1 u^2 + D_1 = 0.$$

Cette relation doit être identique à (1). On a donc

$$\frac{B_1}{A} = \frac{A_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \frac{E_1}{D} = \frac{D_1}{E}.$$

Appliquons alors les formules (6) à l'angle tétraèdre T_1. On trouve

$$\alpha_1 = \pi - \alpha, \qquad \beta_1 = \beta \quad \text{ou} \quad \pi - \beta, \qquad \delta_1 = \pi - \delta \quad \text{ou} \quad \delta, \qquad \gamma_1 = \gamma,$$

ce qui rentre bien dans le théorème énoncé.

Cette proposition est encore vraie quand les angles tétraèdres T et T_1 sont rhomboïdes, mais elle cesse de l'être quand ils ont chacun leurs faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux. Il existe en effet une infinité de tels angles tétraèdres dont la déformation est régie par une même équation

$$tu = k \qquad \text{ou} \qquad \frac{t}{u} = k'.$$

Si α et β désignent deux faces adjacentes d'un angle tétraèdre satis-

faisant à la première condition par exemple, on doit avoir

$$\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}} = k \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}} = k,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{k-1}{k+1} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}} = \frac{1-k}{k+1},$$

égalités dont chacune a lieu pour une infinité de valeurs de α et de β.

IV.

Pour compléter ces généralités, j'établirai encore la propriété suivante de l'angle tétraèdre articulé, analogue à une propriété bien connue du quadrilatère articulé.

Quand un angle tétraèdre articulé se déforme, il existe une relation linéaire entre les cosinus de deux dièdres opposés.

En effet, en conservant les notations précédentes et en désignant en outre par θ le dièdre ON, on a, par la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique,

$$\begin{aligned}\cos\mathrm{BOM} &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi \\ &= \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta\cos\theta,\end{aligned}$$

c'est-à-dire une relation de la forme

$$\mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\cos\theta + \mathrm{C} = 0.$$

Quand l'angle tétraèdre présente l'un quelconque des cas de décomposition signalés, cette relation se réduit à

$$\cos\varphi = \cos\theta,$$

d'où

$$\varphi = \theta,$$

si l'on n'admet pour les dièdres de l'angle tétraèdre que des valeurs comprises entre o et π. Réciproquement, si un angle tétraèdre articulé se déforme de telle manière que deux dièdres opposés restent constamment égaux, cet angle tétraèdre est rhomboïde ou a ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux. En effet, on a alors les relations

$$\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma\cos\delta,$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma\sin\delta,$$

d'où

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\gamma \pm \delta)$$

et

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\gamma - \delta),$$

équations qui admettent les quatre systèmes de solutions

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \beta; \qquad \gamma = \beta, \quad \delta = \alpha;$$

$$\gamma = \pi - \alpha, \quad \delta = \pi - \beta; \qquad \gamma = \pi - \beta, \quad \delta = \pi - \alpha.$$

V.

Nous pouvons maintenant aborder la recherche des conditions de déformabilité d'un octaèdre à faces triangulaires, dont les arêtes sont de longueurs invariables.

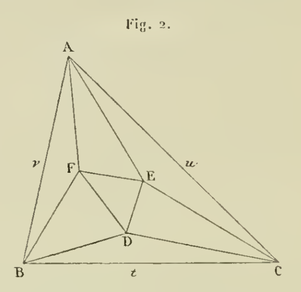
Il faut d'abord montrer qu'un tel octaèdre, même concave, est rigide en général; cela résulte du théorème de Legendre d'après lequel le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre est précisément égal au nombre de ses arêtes. En effet, la démonstration de ce théorème repose tout entière sur le fait que le polyèdre satisfait à la relation d'Euler (ou de Descartes), et ne dépend nullement de sa convexité ou de sa concavité. Or, un octaèdre à faces triangulaires satisfait bien à cette relation, quelle que soit la disposition de ses faces.

Un octaèdre dont on se donne les arêtes est donc, *en général,* complètement déterminé, c'est-à-dire indéformable. Notre but est de reconnaître, si dans certains cas, par suite de relations particulières

existant entre les arêtes, cette détermination peut cesser d'avoir lieu. Alors l'octaèdre sera déformable.

Supposons qu'il en soit ainsi pour l'octaèdre ABCDEF (*fig.* 2). On voit d'abord que les douze dièdres de cet octaèdre sont nécessai-

Fig. 2.



rement tous variables, quand on lui fait subir la déformation dont il est susceptible.

Admettons en effet que, pendant la déformation de l'octaèdre, l'un de ses dièdres, AB par exemple, reste de grandeur constante. L'angle tétraèdre formé par les quatre faces ayant le point A comme sommet commun sera tout entier rigide, l'un de ses dièdres étant invariable. La considération des angles tétraèdres ayant leurs sommets en F, E, D montre alors que tous les dièdres de l'octaèdre seront de grandeur constante, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'octaèdre présente donc six angles tétraèdres qui tous se déforment avec conservation de leurs faces. Il faut distinguer trois cas, suivant que ces angles tétraèdres sont *généraux* (au sens donné § II à ce mot), *rhomboïdes* ou bien à *faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux*.

VI.

Examinons d'abord le premier cas. Parmi les six angles tétraèdres, envisageons ceux qui ont leurs sommets en A, B, C. Leurs déformations sont régies par trois équations semblables à l'équation (1) et

indécomposables :

$$(7)\qquad A\,t^2u^2 + B\,t^2 + 2C\,tu + D\,u^2 + E = 0,$$

$$(8)\qquad A'\,t^2v^2 + B'\,t^2 + 2C'\,tv + D'\,v^2 + E' = 0,$$

$$(9)\qquad A''u^2v^2 + B''u^2 + 2C''uv + D''v^2 + E'' = 0,$$

en désignant par t, u, v les tangentes des demi-dièdres BC, CA, AB, et par A, B, ..., E″ des constantes qui dépendent des faces des trois angles tétraèdres et, par suite, des arêtes de l'octaèdre.

Les équations précédentes doivent être satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs données à t, u et v. Par conséquent, les équations (8) et (9), en v, doivent avoir *une* ou *deux* racines communes pour une infinité de systèmes de valeurs de t et de u satisfaisant à l'équation (7).

Or il est impossible que les équations (8) et (9) aient constamment leurs deux racines communes : en effet, s'il en était ainsi, on aurait

$$\frac{A't^2 + D'}{A''u^2 + D''} = \frac{C't}{C''u} = \frac{B't^2 + E'}{B''u^2 + E''},$$

d'où l'on tire deux équations du troisième degré en t et u, qui devraient avoir, avec l'équation (7), une infinité de solutions communes; or ceci est impossible, puisque cette dernière est supposée indécomposable.

Ainsi les équations (8) et (9) ont, en général, une seule racine commune en v. Cette racine est donc exprimable en fonction rationnelle des coefficients de ces équations et, par suite, de t et de u. Or, on tire des équations (7) et (8)

$$u = \frac{-Ct \pm \sqrt{F(t)}}{At^2 + D},$$

$$v = \frac{-C't \pm \sqrt{F_1(t)}}{A't^2 + D'},$$

en posant

$$F(t) = C^2t^2 - (At^2 + D)(Bt^2 + E),$$

$$F_1(t) = C'^2t^2 - (A't^2 + D')(B't^2 + E'),$$

et en choisissant convenablement les signes placés devant les radicaux.

On a donc

$$\frac{-C't \pm \sqrt{F_1(t)}}{A't^2+D'} = \varphi\left[\frac{-Ct \pm \sqrt{F(t)}}{At^2+D}\right],$$

$\varphi(x, y)$ désignant une fonction rationnelle.

Le second membre de cette relation peut se mettre sous la forme

$$\frac{L + M\sqrt{F(t)}}{N},$$

L, M, N étant des polynomes en t. On arrive finalement à l'identité

$$P\sqrt{F(t)} + Q\sqrt{F_1(t)} + R = 0,$$

où P, Q, R sont encore des polynomes en t. On tire de là

$$F(t)F_1(t) = \left[\frac{R^2 - P^2F(t) - Q^2F_1(t)}{2PQ}\right]^2.$$

Le produit des polynomes $F(t)$ et $F_1(t)$ doit donc être le carré d'une fonction rationnelle et, par suite, d'un polynome en t. Il en résulte que $F(t)$ et $F_1(t)$ sont identiques à un facteur constant près.

En effet, $F(t)$ et $F_1(t)$ sont deux polynomes bicarrés, qui ne sont pas carrés parfaits, sans quoi les équations (7) et (8) seraient réductibles, contrairement à l'hypothèse faite. On peut donc poser

$$F(t) = -AB(t-\lambda)(t+\lambda)(t-\mu)(t+\mu), \qquad \lambda \neq \mu,$$
$$F_1(t) = -A'B'(t-\lambda')(t+\lambda')(t-\mu')(t+\mu'), \qquad \lambda' \neq \mu',$$

et leur produit ne peut être carré parfait que si l'on a

$$\lambda = \pm\lambda', \qquad \mu = \pm\mu',$$

ou bien

$$\lambda = \pm\mu', \qquad \mu = \pm\lambda',$$

ce qui justifie l'assertion énoncée. Nous en tirons cette conséquence importante :

Les équations (7) et (8), respectivement en u et v, ont leurs racines égales pour les mêmes valeurs de t.

Je pourrais poursuivre l'étude algébrique du système (7), (8), (9),

dont la considération doit seule suffire, comme on le voit aisément, à donner les conditions de déformabilité de l'octaèdre. Mais on serait ainsi engagé dans des calculs à peu près inextricables, en raison de la manière compliquée dont les éléments de l'octaèdre entrent dans les coefficients A, B, C, ... Aussi vais-je prendre une autre voie. Je signalerai toutefois le théorème suivant, parce qu'il peut trouver son application dans d'autres recherches :

Pour que les équations (7), (8), (9) *aient une infinité de solutions communes, il faut et il suffit qu'elles résultent de l'élimination successive de* t, u, v, *entre les* 2 *équations*

$$luv + mvt + ntu + p = 0,$$

$$l't + m'u + n'v + p'tuv = 0,$$

où l, m, n, p, l', m', n', p' *sont des coefficients arbitraires.*

Revenons donc à la considération de l'octaèdre ABCDEF et interprétons géométriquement le dernier résultat obtenu.

Quand t prend une valeur telle que l'équation (7) en u ait ses racines égales, le dièdre CE devient évidemment égal à 0 ou à π. De même, quand l'équation (8) en v a ses racines égales, le dièdre BF devient égal à 0 ou à π. Ainsi les dièdres CE et BF sont tels que si l'un d'eux devient égal à 0 ou à π, l'autre prend en même temps l'une de ces valeurs.

Or, pendant la déformation de l'octaèdre, il existe une relation linéaire entre les cosinus de ces deux dièdres. On a en effet (§ IV) une relation linéaire entre le cosinus de chacun de ces dièdres et celui du dièdre BC, qui leur est opposé dans les angles tétraèdres articulés ayant leurs sommets respectivement en C et en B

$$l\cos CE + m\cos BC + n = 0,$$

$$l'\cos BF + m'\cos BC + n' = 0,$$

d'où l'on tire bien une relation

$$(10) \qquad l''\cos CE + m''\cos BF + n'' = 0,$$

l'', m'', n'' étant des coefficients constants.

Faisons successivement, dans cette relation, le dièdre CE égal à o et à π. Le dièdre BF, avons-nous dit, prendra à chaque fois l'une des mêmes valeurs ; il ne peut prendre deux fois la valeur o ou la valeur π, car on aurait alors

$$l'' \pm m'' + n'' = 0,$$

$$-l'' \pm m'' + n'' = 0,$$

m'' ayant le même signe dans chaque premier membre et, par suite,

$$l'' = 0, \qquad m'' = \pm n''.$$

La relation (10) se réduirait donc à

$$\cos \mathrm{BF} = \pm 1,$$

ce qui est impossible, puisque tous les dièdres de l'octaèdre sont variables. Le dièdre BF doit donc prendre une fois la valeur o et une fois la valeur π, dans le même ordre que le dièdre CE ou dans l'ordre inverse. On a donc

$$l'' \pm m'' + n'' = 0,$$

$$-l'' \mp m'' + n'' = 0,$$

avec correspondance des signes de m'' dans les deux premiers membres. On tire de là

$$n'' = 0, \qquad l'' = \pm m'',$$

et la relation (10) devient

$$\cos \mathrm{CE} = \pm \cos \mathrm{BF}.$$

Ainsi, pendant la déformation de l'octaèdre, *les dièdres* CE *et* BF *sont constamment égaux ou supplémentaires*.

Nous pouvons faire le même raisonnement en considérant trois angles tétraèdres ayant pour sommets ceux d'une face autre que ABC. Comme tous ces angles tétraèdres sont supposés généraux, la conclusion sera la même, et nous pouvons dire :

Pendant la déformation de l'octaèdre, ses dièdres opposés restent deux à deux égaux ou supplémentaires.

Envisageons alors deux angles tétraèdres opposés, par exemple ceux ayant leurs sommets respectivement en A et D. Ils doivent se déformer de telle manière que leurs dièdres soient deux à deux constamment égaux ou supplémentaires. D'après le théorème du § III, cela exige que leurs faces soient deux à deux égales ou supplémentaires. Il en est de même pour les faces des trois autres couples d'angles tétraèdres opposés que présente l'octaèdre.

Il est facile de voir que, seule, l'égalité des faces correspondantes est admissible. Considérons, en effet, deux faces opposées de l'octaèdre, ABC et DEF par exemple. On a, d'après ce qui précède,

$$A = D \quad \text{ou} \quad A + D = \pi,$$
$$B = E \quad \text{ou} \quad B + E = \pi,$$
$$C = F \quad \text{ou} \quad C + F = \pi,$$

et, comme on le montre en Géométrie élémentaire pour établir la similitude de deux triangles ayant leurs côtés deux à deux parallèles ou perpendiculaires, les égalités écrites en tête de chaque ligne peuvent seules avoir lieu.

L'octaèdre est donc tel que ses faces opposées deux à deux sont des triangles semblables, les côtés homologues étant toujours des arêtes opposées. On a, par suite, la série d'égalités

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}, \qquad \frac{CA}{FD} = \frac{AE}{DB} = \frac{EC}{BF},$$
$$\frac{EC}{BF} = \frac{CD}{FA} = \frac{DE}{AB}, \qquad \frac{CD}{FA} = \frac{DB}{AE} = \frac{BC}{EF},$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad \begin{cases} AB = DE, & BC = EF, & CA = FD, \\ AE = BD, & BF = CE, & CD = AF. \end{cases}$$

Ainsi l'octaèdre a ses arêtes opposées deux à deux égales.

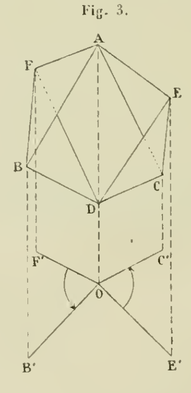
Je vais maintenant montrer que ces relations suffisent à assurer la déformabilité de l'octaèdre (ce qui ne résulte pas de l'analyse précédente), *si l'on suppose en outre remplies certaines conditions relatives à la situation respective des faces*. Il existe, en effet, des octaèdres convexes dont les arêtes opposées deux à deux sont égales, et qui, d'après le théorème de Cauchy, ne peuvent être déformables.

VII.

Considérons à cet effet un système de quatre triangles invariables AFB, DFB, ACE, DCE (*fig*. 3), articulés aux points A et D et suivant les droites BF et CE. On suppose

$$AF = DC, \quad AB = DE, \quad DB = AE, \quad DF = AC, \quad BF = CE.$$

Fig. 3.



La figure formée par les deux derniers triangles est évidemment superposable ou bien à la figure formée par les deux premiers, ou bien à celle qui est symétrique à cette dernière par rapport à un plan quelconque. Cela fait deux cas à examiner.

Supposons d'abord que les deux systèmes de triangles forment des figures superposables. Alors les quatre plans ADF, ADB, ADE, ADC se projetteront, sur un plan perpendiculaire à AD, respectivement suivant les droites OF′, OB′, OE′, OC′; telles que les angles F′OB′, E′OC′ soient égaux et que le même sens de rotation amène OF′ en coïncidence avec OB′, OE′ en coïncidence avec OC′. On a donc

$$\text{angle } F'OE' = \text{angle } B'OC'.$$

Il résulte de là que les deux trièdres A(FDE) et D(CAB), qui ont la même orientation, sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune. En effet, l'égalité précédente exprime celle des dièdres de ces trièdres qui ont AD pour arête commune. On a, d'autre part,

$$\text{angle } FAD = \text{angle } CDA,$$

$$\text{angle } DAE = \text{angle } ADB.$$

On conclut de là à l'égalité des angles FAE, CDB. Les deux triangles FAE, BDC sont donc égaux, et l'on a

$$FE = BC.$$

Cette égalité a lieu pendant toutes les déformations dont est susceptible notre système de triangles, à la condition, je le répète, que l'ensemble des deux derniers soit constamment superposable à celui des deux premiers.

Or, cette déformation est telle que la détermination complète du système dépend de deux paramètres (pour lesquels on peut prendre par exemple la distance AD et l'angle F′OE′). Elle est donc encore possible si l'on assujettit le système à cette condition supplémentaire que la distance EF reste constante : il en sera alors de même de la distance BC.

L'ensemble de la figure présentera huit triangles invariables, constituant un octaèdre déformable dont les arêtes opposées sont égales deux à deux.

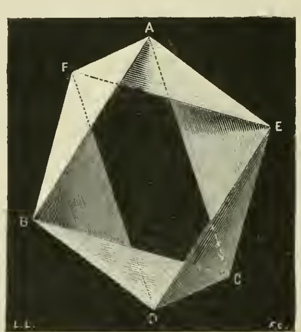
Cet octaèdre admet un axe de symétrie : menons, en effet, dans le

plan bissecteur du dièdre projeté en B'OE', une droite L, perpendiculaire à AD et passant par le milieu de cette droite. Il est clair que les points A, B, F sont respectivement symétriques des points D, E, C, par rapport à L. On peut donc amener l'octaèdre en coïncidence avec lui-même en le faisant tourner de deux angles droits autour de L. On voit aussi que les trois diagonales de l'octaèdre sont perpendiculaires à la même droite L qui les partage chacune en deux parties égales ([1]).

On peut réaliser un semblable octaèdre au moyen de triangles en carton ou en bois mince convenablement découpés, assemblés par des charnières en papier gommé. Il est nécessaire de laisser vides les faces ABC, DEF, qui ne sont réalisées que par leur contour.

Le modèle ainsi obtenu est représenté *fig.* 4.

Fig. 4.



Octaèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux.
Les faces sont ABC, DEF, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE

Si, maintenant, revenant à la *fig.* 3, on suppose la figure formée par les deux triangles ACE, DCE, superposable à la figure symétrique de celle formée par les deux triangles AFB, DFB, on reconnaîtra, par un raisonnement tout semblable au précédent que, si la distance EF reste constante, la distance BC est nécessairement variable : l'octaèdre ABCDEF ne peut être déformable.

([1]) Ces remarques intéressantes m'ont été communiquées par M. Mannheim.

Ainsi se trouve légitimée l'assertion faite à la fin du § VI. On voit en outre que les relations (11) ne sont pas indépendantes, mais que l'une d'elles résulte des cinq autres.

VIII.

Je passe au cas où l'un au moins des angles tétraèdres est rhomboïde, sans qu'un seul d'entre eux ait ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux. Supposons que l'angle tétraèdre C présente cette particularité, c'est-à-dire que l'on ait, par exemple :

$$\text{angle BCD} = \text{angle DCE}, \quad \text{angle BCA} = \text{angle ACE}.$$

Le système (7), (8), (9) devient alors

$$(7') \qquad A\,t^2 u + 2Ct + Du = 0,$$

$$(8') \qquad A' t^2 v^2 + B' t^2 + 2C' tv + D' v^2 + E' = 0,$$

$$(9') \qquad A'' u^2 v^2 + B'' u^2 + 2C'' uv + D'' v^2 + E'' = 0.$$

Nous pouvons raisonner comme précédemment : les équations (8') et (9') peuvent avoir constamment leurs deux racines en v communes, ou bien n'avoir en commun qu'une seule de ces racines.

Je montrerai tout à l'heure que la première hypothèse est inadmissible. Les équations (8') et (9') ont donc une seule racine commune en v : cette racine est fonction rationnelle de t et u, et par suite de t, et l'équation (8') se réduit nécessairement à l'une des formes

$$A' t^2 v + 2C' t + D' v = 0, \qquad B' t^2 + 2C' tv + E' = 0.$$

En d'autres termes, l'angle tétraèdre B est rhomboïde, et l'on a

$$\text{dièdre BF} = \text{dièdre BC} = \text{dièdre CE}.$$

Il en résulte encore que les équations (7') et (9'), respectivement en t et en v, ont leurs racines égales pour les mêmes valeurs de u. On en conclut que les dièdres CD et AF sont constamment égaux ou

supplémentaires. Il en est de même pour les dièdres BD, AE. En continuant ainsi, on verra que les couples de dièdres opposés de l'octaèdre possèdent tous la même propriété.

Les conclusions du § VI ne sont donc pas modifiées.

Il reste à voir que les équations (8') et (9') ne peuvent avoir constamment leurs deux racines en v communes.

En effet, s'il en est ainsi, on doit avoir

$$\frac{A't^2+D'}{A''u^2+D''}=\frac{C't}{C''u}=\frac{B't^2+E'}{B''u^2+E''}$$

ou

$$A'C''t^2u-C'A''tu^2-C'D''t+D'C''u=0,$$
$$B'C''t^2u-C'B''tu^2-C'E''t+E'C''u=0.$$

Ces dernières équations doivent être identiques à l'équation (7). On a donc

$$C'A''=0, \qquad C'B''=0;$$

d'où

$$C'=0 \qquad \text{ou bien} \qquad A''=0, \qquad B''=0.$$

Or, si l'on a

$$C'=0,$$

il résulte de la discussion du § II que l'équation (8') a nécessairement l'une des deux formes

$$A't^2v^2+E'=0, \qquad B't^2+D'v^2=0.$$

L'angle tétraèdre B aurait donc ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux, et nous avons exclu, dans l'examen de ce cas, la présence de pareils angles tétraèdres.

On a donc

$$A''=0, \qquad B''=0,$$

et l'équation (9') se réduit à

$$2C''uv+D''v^2+E''=0.$$

L'angle tétraèdre A est rhomboïde (§ II), et l'on a

$$\text{angle EAC} = \pi - \text{angle BAC}, \qquad \text{angle FAE} = \pi - \text{angle BAF},$$
$$\text{dièdre AE} = \text{dièdre AB}.$$

Comme on a aussi

$$\text{dièdre CE} = \text{dièdre CB},$$

les deux angles tétraèdres ayant leurs sommets en B et E doivent se déformer de manière que deux dièdres adjacents de l'un soient constamment égaux, respectivement, à deux dièdres adjacents du second angle tétraèdre. Il faut donc (§ III) que leurs faces soient deux à deux égales ou supplémentaires. On a aussi

$$\text{dièdre FE} = \text{dièdre FB},$$
$$\text{dièdre DE} = \text{dièdre DB}.$$

Les angles tétraèdres F et D sont donc rhomboïdes.

En réunissant ces résultats, on voit que les triangles

AFE et AFB,
ACB et ACE,
BFD et EFD,
BCD et ECD

ont, deux à deux, leurs angles égaux ou supplémentaires. L'égalité seule est possible. On a en particulier

$$\text{angle BAF} = \text{angle EAF},$$
$$\text{angle BAC} = \text{angle EAC}.$$

Nous avons reconnu d'autre part que ces angles, faces de l'angle tétraèdre A, sont deux à deux supplémentaires. Ils ne peuvent donc être, tous, égaux qu'à $\frac{\pi}{2}$, ce qui est visiblement impossible.

IX.

Il reste à examiner le cas où l'un des angles tétraèdres au moins a ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.

Supposons qu'il en soit ainsi pour l'angle tétraèdre C. Les variables t et u satisfont à l'une des relations

$$tu = k, \qquad \frac{t}{u} = k.$$

J'admettrai l'existence de la première, le raisonnement étant le même dans le second cas. Cela posé, il faut examiner deux hypothèses différentes :

1° Aucun des angles tétraèdres dont les sommets se trouvent aux extrémités des arêtes issues de C n'a ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.

2° L'un de ces angles tétraèdres présente cette particularité.

Dans le premier cas, les angles tétraèdres A et B sont généraux ou rhomboïdes. Supposons-les généraux, par exemple. Le système des relations entre t, u, v est alors

$$(7'') \qquad tu = k,$$

$$(8'') \qquad A't^2v^2 + B't^2 + 2C'tv + D'v^2 + E' = 0,$$

$$(9'') \qquad A''u^2v^2 + B''u^2 + 2C''uv + D''v^2 + E'' = 0.$$

L'équation (8″) en t et l'équation (9″) en u ont leurs racines égales pour les mêmes valeurs de v : on en conclut que les dièdres AE et BD sont constamment égaux ou supplémentaires.

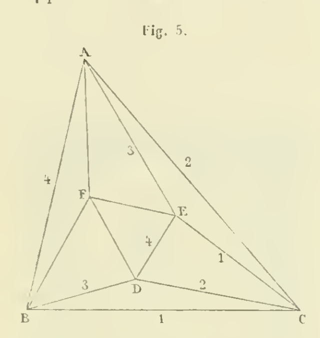
La considération simultanée des angles tétraèdres A, C, E montre de même que les dièdres AB, DE sont constamment égaux ou supplémentaires. On peut donc construire la *fig.* 5, où les dièdres affectés du même chiffre présentent cette relation (les dièdres 1 et les dièdres 2 à cause de la nature de l'angle tétraèdre C).

Si l'on applique alors aux angles tétraèdres A et D d'une part,

B E de l'autre, le théorème qui a déjà été utilisé plusieurs fois, on voit :

1° Que les dièdres FA et FD, d'une part, FB et FE, de l'autre, sont constamment égaux, et que l'angle tétraèdre F a, par suite, ses faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux :

Fig. 5.



2° Que les faces de l'octaèdre se répartissent en quatre couples de triangles ayant leurs angles égaux deux à deux :

AFE et DFB,

AFB et DFE,

AEC et DBC,

ABC et DEC.

Pour chaque couple les sommets homologues sont écrits dans le même ordre. On a donc la série d'égalités

$$\frac{AF}{DF} = \frac{FE}{FB} = \frac{EA}{BD}, \qquad \frac{AF}{DF} = \frac{FB}{FE} = \frac{BA}{ED},$$

$$\frac{AE}{DB} = \frac{EC}{BC} = \frac{CA}{CD}, \qquad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CD},$$

d'où l'on tire

$$(12) \qquad \begin{cases} FA = FD, \quad FE = FB, \quad CA = CD, \\ CB = CE, \quad AE = DB, \quad AB = DE. \end{cases}$$

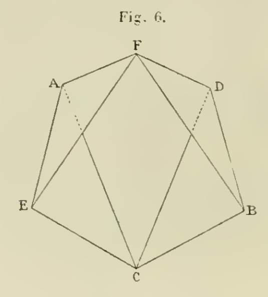
Ainsi les arêtes de l'octaèdre doivent encore être égales deux à deux, mais les arêtes égales ne sont pas toutes opposées deux à deux, ce qui distingue les conditions (12) des conditions (11).

X.

Il faut maintenant montrer que tout octaèdre dont les arêtes satisfont aux relations (12) est déformable, lorsque de plus certaines conditions, relatives aux dispositions des faces, sont remplies.

Pour cela, considérons (*fig.* 6) le système de quatre triangles

Fig. 6.



rigides FAE, CAE, FDB, CDB, articulés aux points F, C, et suivant les droites AE, BD. On suppose les égalités

$$FA = FD, \quad FE = FB, \quad CA = CD, \quad CE = CB, \quad AE = DB.$$

Le système des deux derniers triangles est superposable à celui des deux premiers, ou bien il lui est symétrique par rapport à un certain plan passant par FC.

Dans le premier cas on verra, par des raisonnements analogues à ceux du § VII, que l'on ne peut avoir constamment AB = DE. L'octaèdre constitué en reliant les points A et B d'une part, D et E de l'autre, ne satisfaisant pas à toutes les relations (12) et ne satisfaisant pas non plus aux relations (11), ne peut être déformable.

Au contraire, si les deux systèmes de triangles sont symétriques, il

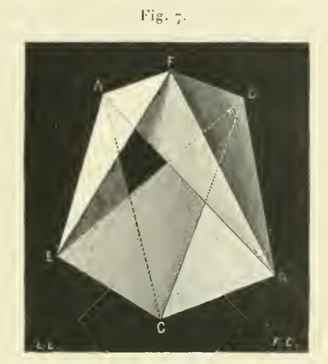
est évident que, quelle que soit leur position respective, on a toujours

$$AB = DE.$$

Le raisonnement s'achèvera comme au § VII, et l'on aura établi que les relations (12), de même que les relations (11), suffisent, sous la restriction indiquée, à assurer la déformabilité d'un octaèdre.

Ce deuxième octaèdre peut être réalisé comme le premier, en lais-

Fig. 7.



Octaèdre possédant un plan de symétrie passant par deux sommets opposés.
Les faces sont ABC, DEF, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE.

sant vides les faces ABC et DEF. Le modèle ainsi obtenu est représenté *fig.* 7.

XI.

J'arrive enfin au cas où deux angles tétraèdres ayant leurs sommets adjacents, l'angle tétraèdre C et l'angle tétraèdre B, par exemple, ont chacun leurs faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.

On voit tout d'abord qu'il doit en être de même pour tous les angles tétraèdres de l'octaèdre.

En effet, des relations

$$tu \quad \text{ou} \quad \frac{t}{u} = k,$$

$$tv \quad \text{ou} \quad \frac{t}{v} = k',$$

on tire

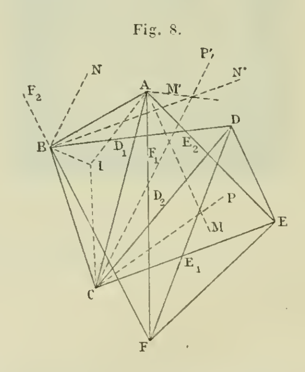
$$\frac{u}{v} \qquad \text{ou} \qquad uv = k'',$$

ce qui établit la proposition pour l'angle tétraèdre A ; on l'établira de même pour les angles tétraèdres D, E, F.

Si donc le dièdre BC devient égal à o ou à π, t devenant nul ou infini, les variables u, v sont aussi nulles ou infinies, et les dièdres AC, AB, égaux à o ou à π. Il en est de même pour tous les autres dièdres. En d'autres termes, l'octaèdre peut être complètement aplati sur la face ABC.

Représentons-le dans cette position. Il peut se présenter plusieurs cas de figure pour lesquels le raisonnement est à peu près identique.

Fig. 8.



Je supposerai, par exemple, que la disposition est celle de la *fig.* 8. On a

$$\text{angle FAE} = \text{angle BAC}.$$

$$\text{angle DCE} = \text{angle ACB},$$

$$\text{angle DBF} = \pi - \text{angle ABC}.$$

Pendant la déformation de l'octaèdre, on peut avoir divers systèmes

de relations entre t, u, v. Soit, par exemple (§ II),

$$uv = \frac{\cos\frac{\text{BAF}-\text{BAC}}{2}}{\cos\frac{\text{BAF}+\text{BAC}}{2}},$$

$$\frac{t}{v} = \frac{\sin\frac{\text{ABC}-\text{DBC}}{2}}{\sin\frac{\text{ABC}+\text{DBC}}{2}},$$

$$tu = \frac{\sin\frac{\text{DCB}-\text{ACB}}{2}}{\sin\frac{\text{DCB}+\text{ACB}}{2}}.$$

Ces équations doivent être satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs de t, u, v. On a donc

$$(13)\qquad \frac{\cos\frac{\text{BAF}-\text{BAC}}{2}}{\cos\frac{\text{BAF}+\text{BAC}}{2}}\;\frac{\sin\frac{\text{ABC}-\text{DBC}}{2}}{\sin\frac{\text{ABC}+\text{DBC}}{2}}\;\frac{\sin\frac{\text{DCB}+\text{ACB}}{2}}{\sin\frac{\text{DCB}-\text{ACB}}{2}} = 1.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'octaèdre ABCDEF soit déformable.

Pour donner à cette condition une forme géométrique, menons les bissectrices intérieures du triangle ABC : AI, BI, CI. Menons encore les droites AM, CP, BN, les deux premières, bissectrices *intérieures* des angles EAF, DCE, la troisième, bissectrice *extérieure* de l'angle FBD. Soient enfin AM' la bissectrice *extérieure* de l'angle IAM, BN' et CP' les bissectrices *intérieures* des angles IBN, ICP. On a :

$$\frac{\cos\frac{\text{BAF}-\text{BAC}}{2}}{\cos\frac{\text{BAF}+\text{BAC}}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\text{IAM}}{2}-\text{IAC}\right)}{\cos\left(\frac{\text{IAM}}{2}+\text{BAI}\right)} = \frac{\cos\left(\text{IAM}'-\frac{\pi}{2}-\text{IAC}\right)}{\cos\left(\text{IAM}'-\frac{\pi}{2}+\text{BAI}\right)}$$
$$= \frac{\sin(\text{IAM}'-\text{IAC})}{\sin(\text{IAM}'+\text{BAI})} = \frac{\sin\text{CAM}'}{\sin\text{BAM}'},$$

$$\frac{\sin\frac{ABC - DBC}{2}}{\sin\frac{ABC + DBC}{2}} = \frac{\sin\left(IBA - \frac{IBN}{2}\right)}{\sin\left(CBI + \frac{IBN}{2}\right)} = \frac{\sin(IBA - IBN')}{\sin(CBI - IBN')} = \frac{\sin N'BA}{\sin CBN'},$$

$$\frac{\sin\frac{DCB + ACB}{2}}{\sin\frac{DCB - ACB}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{PCI}{2} + ICB\right)}{\sin\left(\frac{PCI}{2} - ACI\right)} = \frac{\sin(P'CI + ICB)}{\sin(P'CI - ACI)} = \frac{\sin P'CB}{\sin P'CA},$$

La relation (13) devient donc

$$\frac{\sin CAM'}{\sin BAM'}\,\frac{\sin N'BA}{\sin CBN'}\,\frac{\sin P'CB}{\sin P'CA} = 1;$$

d'où l'on conclut, en vertu d'un théorème bien connu, que les droites AM', BN', CP' sont concourantes.

J'ai fait une hypothèse particulière sur la forme des relations qui existent entre t, u, v. Il est clair que, dans tous les autres cas, on arrivera à un résultat analogue, et l'on peut énoncer comme il suit la règle générale de construction d'un octaèdre articulé dont tous les angles tétraèdres ont leurs faces opposées deux à deux égales ou supplémentaires.

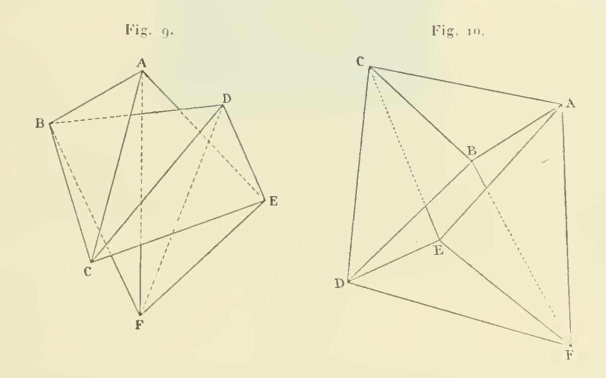
On construit un triangle ABC *quelconque, dont les bissectrices intérieures sont les droites* AI, BI, CI, *et des sommets de ce triangle on mène trois droites concourantes quelconques* AM', BN', CP'. *On trace les droites* AM, BN, CP, *symétriques des droites* AI, BI, CI, *respectivement par rapport aux droites* AM', BN', CP'.

On construit ensuite les angles F_1AE_2, D_1BF_2, E_1CD_2, *obtenus en faisant tourner dans leur plan les angles* BAC, CBA, ACB, *autour de leurs sommets et d'angles égaux en grandeur et en signe respectivement à* IAM, IBN, ICP. *Soient* D, E, F *les points de rencontre respectifs des droites (prolongées s'il le faut au delà des sommets du triangle)* BD_1 *et* CD_2, CE_1 *et* AE_2, AF_1 *et* BF_2.

En supposant réalisés les triangles ABC, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE, DEF, *articulés deux à deux suivant leurs côtés communs, ces triangles sont les faces d'un octaèdre déformable.*

On peut éprouver certaines difficultés dans la construction d'un modèle de ce dernier octaèdre : quelles faces faut-il laisser vides? de quel côté doit être tournée la concavité de chaque dièdre? Ce sont des problèmes qu'on ne pourra résoudre dans chaque cas particulier que par l'examen attentif des relations entre t, u, v et des signes qu'elles imposent à chaque variable. Il serait beaucoup trop long d'exposer ici ces raisonnements minutieux. Je me contenterai d'indiquer comment doit se faire la construction de l'octaèdre de la *fig.* 8.

Je l'ai représenté (*fig.* 9) dans la même position que dans la figure précédente; les faces AEC, DBF sont vides. Le dièdre AF a sa conca-

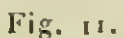


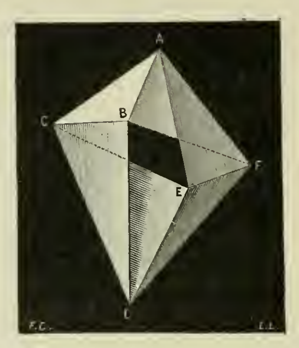
vité tournée en avant du plan de la figure; celle du dièdre DC est tournée en arrière.

Les lignes tracées en pointillé indiquent sans ambiguïté dans quel ordre sont superposées les faces : en particulier, la face DEF est en arrière de la face AEF.

Quand on déforme cet octaèdre, en laissant dans le plan de la figure la face ABF, les sommets D, E, C se déplacent en avant de ce plan, et en poursuivant la déformation on arrive à une nouvelle position d'aplatissement représentée (*fig.* 10). La *fig.* 11 représente une position intermédiaire.

Si le lecteur veut bien prendre la peine de construire ce modèle, en


Fig. 11.



Octaèdre dont tous les angles tétraèdres ont leurs faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.
Les faces sont ABC, DEF, BCD, CAE, ABF, AEF, BFD, CDE.

suivant les indications précédentes, il devra, je le répète, conserver à peu près exactement les proportions de la figure.

XII.

En résumé, l'étude précédente a fait reconnaître qu'il existe *trois* types d'octaèdres articulés à faces invariables. Tous ces polyèdres sont concaves ou, pour parler d'une façon plus précise, possèdent certaines faces qui s'entrecroisent.

Les octaèdres du type I et ceux du type II sont susceptibles de définitions simples : les premiers possèdent un axe de symétrie et, par suite, sont tels que la figure formée par quatre de leurs faces ayant un sommet commun est superposable à la figure formée par les quatre autres faces; ceux du type II possèdent un plan de symétrie, passant par deux sommets opposés. (Ces définitions ne sont pas *absolument* suffisantes, mais on ne pourrait les compléter qu'au prix de bien des

longueurs, et je pense que l'examen des *fig.* 4 et 7 rend cela inutile.)

Quant aux octaèdres du type III, on a vu que leur définition est plus compliquée ; leur déformabilité est loin d'être aussi intuitive que celle des premiers, et en ce sens ils doivent être considérés comme les plus intéressants.

Je ferai encore remarquer que le problème que j'ai traité est identique aux deux problèmes suivants :

1° *Quels sont les hexagones gauches déformables avec conservation de leurs côtés et de leurs angles?*

Si, en effet, un hexagone gauche est déformable dans ces conditions, les droites qui joignent ses sommets de deux en deux sont de longueurs constantes et les huit triangles formés par ces droites et par les côtés de l'hexagone sont les faces d'un octaèdre déformable avec conservation de ses arêtes.

Un octaèdre déformable présente, réciproquement, *quatre* de ces hexagones. Ce sont (*fig.* 4, 7 ou 10) les hexagones

ABCDEF,
ABFDEC,
AECDBF,
AEFDBC.

2° *Dans quel cas un système de six plans* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *dont chacun est articulé avec le précédent suivant une droite servant de charnière, le plan* 6 *étant articulé avec les plans* 1 *et* 5, *est-il susceptible de déformation?*

En effet, les droites suivant lesquelles sont articulés ces plans forment un hexagone déformable avec conservation de ses côtés et de ses angles.

Les faces pleines de l'un des octaèdres des *fig.* 4, 7, 11 constituent un pareil système.

XIII.

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer l'analogie que présente la théorie de l'octaèdre articulé avec celle des systèmes de quadrilatères articulés étudiés par MM. Hart et Kempe dans des cas particuliers et par M. Darboux dans le cas général. L'un des problèmes traités par ces géomètres est, en effet, le suivant : trois quadrilatères plans articulés ABCD, AEFG, BEHI étant disposés comme l'indique la

Fig. 12.

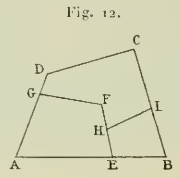


fig. 12, dans quel cas leur système, rigide en général, est-il susceptible de déformation ?

Si l'on désigne par t, u, v les tangentes des moitiés des angles BAD, ABC, BEH, il existe entre ces quantités trois relations qui ont la même forme que les relations (7), (8), (9) et qui doivent avoir une infinité de solutions. C'est le même problème qui s'est présenté dans la théorie de l'octaèdre articulé [1].

---

[1] Les modèles des trois octaèdres, construits avec des feuilles minces de carton, ont été offerts aux Collections de l'École polytechnique.

Remarques à propos du Mémoire précédent;

Par M. A. MANNHEIM.

Le Mémoire de M. Bricard, très intéressant en lui-même, a une valeur particulière au point de vue de la *Géométrie cinématique*, parce qu'il constitue un chapitre de l'Étude du déplacement d'un triangle dans l'espace.

M. Bricard, en découvrant des octaèdres déformables, prouve par là que sous certaines conditions un triangle de grandeur invariable peut être déplacé de façon que ses sommets décrivent des arcs de cercles.

En effet, supposons fixe l'une des faces ABC de l'un des octaèdres déformables, pendant la déformation les sommets D, E, F de la face opposée tournent alors autour des côtés de cette face ABC et le triangle DEF est déplacé. Dans le cas d'un octaèdre quelconque, ABC étant fixe, le déplacement du triangle DEF n'est pas possible. On s'en rend compte facilement en remarquant que les sommets de ce triangle ne pouvant décrire que des cercles sont assujettis chacun à deux conditions. Le triangle lui-même est alors assujetti à six conditions : il est donc immobile.

Prenons (*fig.* 2) un octaèdre déformable dont la face ABC est fixe. Le triangle DEF peut alors être déplacé. Les propriétés bien connues, relatives à ce déplacement, conduisent à des propriétés de l'octaèdre. Je vais en donner un seul exemple.

Appliquons ce théorème :

Les plans normaux aux trajectoires des points d'un plan passent par un point de ce plan.

Le plan normal à la trajectoire du point D est le plan de la face BDC. De même, les plans des faces qui passent par AB, AC sont les plans normaux aux trajectoires des sommets F, E. Ces trois plans se coupent alors en un point du plan DEF.

On peut, d'après cela, énoncer ce théorème :

Les plans des faces d'un octaèdre déformable, qui passent par les côtés d'une face de ce polyèdre, se coupent en un point du plan de la face opposée à celle-ci.

Ainsi, on peut trouver des propriétés des octaèdres déformables ; mais indépendamment de ces propriétés, apparaissent d'autres questions relatives au triangle mobile.

Pour un déplacement infiniment petit du triangle, il y a un axe de déplacement : quel est le lieu de ces axes lorsque le déplacement du triangle est continu ? Quel est le lieu des foyers du plan du triangle mobile ? etc., etc.

On voit qu'après la découverte des octaèdres déformables, l'étude du déplacement d'un triangle se présente dans des conditions particulières et nécessite de nouvelles recherches dignes des efforts des géomètres.

Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles;

PAR M. P. DUHEM.

§ 1. — Sur les équations générales de l'équilibre des fluides.

Nous avons établi, dans un précédent Travail ([1]), les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une masse fluide soit en équilibre stable; mais, dans cette étude, nous avons admis que toutes les forces exercées sur les divers éléments du fluide étaient des *forces extérieures;* nous avons supposé, en outre, que ces forces dérivaient d'une fonction potentielle dépendant des coordonnées du point où se trouve l'élément fluide considéré, mais point des propriétés de cet élément.

C'est là un cas infiniment particulier de l'Hydrostatique. Nous avons étudié ailleurs ([2]) un cas beaucoup plus général : c'est celui où deux éléments fluides, de masses dm et dm', exercent l'un sur l'autre des actions dont le potentiel est de la forme

$$\Psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm',$$

r étant la distance des deux masses élémentaires et ρ, ρ' leurs densités.

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I. (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 108.)

([2]) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique.* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. X, p. 183.)

Dans ce cas, les *actions* mutuelles des deux masses élémentaires comprennent non seulement une *force* répulsive réciproque, dont la grandeur est

$$-\frac{\partial \Psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} dm\, dm',$$

mais encore une *influence;* cette influence, qui tend à accroître la densité de l'élément dm sans tendre à déplacer le centre de gravité de cet élément, a pour grandeur

$$-\frac{\partial \Psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} dm\, dm'.$$

La masse dm' est soumise à une influence analogue.

Ce type d'actions mutuelles est très étendu. Il comprend, en particulier, les actions newtoniennes; dans ce cas, la fonction Ψ ne dépend que de r, et point de ρ et de ρ'; les *actions* mutuelles de deux particules se réduisent à des *forces* réciproques et les *influences* sont supprimées; il comprend aussi l'action répulsive, insensible entre corps denses, mais sensible lorsqu'un des corps agissants est très raréfié, par laquelle M. Faye explique les diverses apparences de la queue des comètes; les actions moléculaires qu'invoque la théorie de la capillarité appartiennent vraisemblablement aussi à la catégorie d'actions pour lesquelles la fonction Ψ dépend véritablement de ρ et de ρ'.

Moyennant certaines hypothèses indispensables sur la manière dont la fonction $\Psi(\rho, \rho', r)$ et ses dérivées partielles se comportent pour les valeurs infiniment petites de r, hypothèses que nous ne voulons pas rappeler ici, il est possible de donner les conditions d'équilibre d'un fluide soumis à de semblables actions. Rappelons brièvement quelles sont ces conditions.

Le système, dont la température est supposée uniforme et constante, admet un potentiel thermodynamique interne qui est de la forme suivante :

$$(1) \qquad \mathfrak{F} = \int \rho \zeta(\rho)\, dv + \frac{1}{2} \int\int \rho\rho' \Psi(\rho, \rho', r)\, dv\, dv',$$

chacune des intégrales s'étendant au volume entier du système. La

fonction $\zeta(\rho)$ n'est déterminée qu'à une constante près; au contraire, la fonction $\Psi(\rho, \rho', r)$ est entièrement déterminée si on lui impose la condition de s'annuler pour les valeurs infinies de r.

Posons

$$(2) \qquad V = \int \Psi(\rho, \rho', r)\rho\, dv',$$

$$(3) \qquad \mathcal{A} = -\int \frac{\partial}{\partial\rho}\Psi(\rho, \rho', r)\rho' dv',$$

$$(2) \qquad \begin{cases} X_i = -\int \dfrac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\dfrac{\partial r}{\partial x}\rho' dv', \\ Y_i = -\int \dfrac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\dfrac{\partial r}{\partial y}\rho' dv', \\ Z_i = -\int \dfrac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\dfrac{\partial r}{\partial z}\rho' dv'. \end{cases}$$

Ces cinq intégrales sont des fonctions finies de x, y, z; elles sont continues si les propriétés de la matière varient d'une manière continue au voisinage du point (x, y, z).

Les égalités (2), (3) et (4) donnent

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -X_i - \mathcal{A}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -Y_i - \mathcal{A}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -Z_i - \mathcal{A}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}. \end{cases}$$

Quant aux forces extérieures, nous supposerons que la masse élémentaire dm est soumise à une force extérieure dont les composantes sont

$$X_e dm, \quad Y_e dm, \quad Z_e dm,$$

avec

$$(6) \qquad X_e = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

la fonction U dépendant des coordonnées x, y, z d'un point de l'élément dm, mais ne dépendant pas de la densité ρ de cet élément; au

cas où l'action exercée par un corps extérieur ne vérifierait pas cette condition, on impliquerait ce corps à l'intérieur du système considéré : c'est d'ailleurs là un artifice dont le seul but est de simplifier les écritures; il serait aisé de s'en passer.

Les conditions d'équilibres du fluide sont les suivantes :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z)$, positive en tous les points de la masse fluide et variant d'une manière continue d'un point à l'autre, telle que l'on ait

$$(7) \qquad \rho[(X_i + X_e)\,dx + (Y_i + Y_e)\,dy + (Z_i + Z_e)\,dz] = d\Pi.$$

En chaque point de la surface qui termine le fluide est appliquée une pression normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et égale en grandeur à la valeur de Π en ce point.

En tout point pris à l'intérieur du fluide, on a l'égalité

$$(8) \qquad \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi + \rho^2 \mathcal{A}.$$

De ces conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide, déduisons immédiatement quelques conséquences.

L'égalité (8) nous montre que, dans le cas général que nous étudions, *la densité en un point n'est plus fonction de la seule pression au même point;* une proposition, admise en général comme évidente par les auteurs qui se sont occupés d'Hydrostatique, se trouve ainsi restreinte au cas où la fonction Ψ ne dépend ni de ρ, ni de ρ', cas que nous nommerons *cas des actions newtoniennes*.

Posons

$$(9) \qquad \Omega = V + U.$$

Ω sera la fonction potentielle totale tant des actions extérieures que des actions intérieures. En vertu des égalités (5) et (6), nous aurons

$$(X_i + X_e)\,dx + (Y_i + Y_e)\,dy + (Z_i + Z_e)\,dz + \mathcal{A}\,d\rho + d\Omega = 0$$

ou bien

$$(10) \qquad \rho\,d\Omega + \mathcal{A}\,\rho\,d\rho + d\Pi = 0.$$

Cette égalité (10), vérifiée en tous les points du fluide, nous montre que les surfaces d'égale pression sont définies par l'équation

$$d\Omega + \mathcal{A}\, d\rho = 0. \tag{11}$$

Les surfaces d'égale pression ne sont pas surfaces d'égal niveau potentiel.

Posons

$$\Theta(\rho) = \zeta(\rho) + \rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}. \tag{12}$$

Comme la fonction $\zeta(\rho)$, la fonction $\Theta(\rho)$ sera définie seulement à une constante près. Les équations (8) et (10) nous montrent que l'on a, à l'intérieur du fluide,

$$\Omega - \rho\mathcal{A} + \Theta(\rho) = \text{const.} \tag{13}$$

Les surfaces d'égale densité vérifient donc l'égalité

$$\Omega - \rho\mathcal{A} = \text{const.} \tag{14}$$

Elles ne coïncident pas avec les surfaces d'égal niveau potentiel.

L'égalité (8) nous montre d'ailleurs que *les surfaces d'égale densité ne coïncident pas avec les surfaces d'égale pression.*

Ainsi, les trois familles de surfaces

$$\Omega = \text{const.}, \qquad \Pi = \text{const.}, \qquad \rho = \text{const.}$$

ne coïncident pas en général; elles ne se réduisent à une même famille de surfaces que dans le cas des actions newtoniennes, cas où l'on a l'identité

$$\mathcal{A} = 0.$$

§ 2. — Généralisation des résultats précédents.

Bien que les résultats précédents aient été établis dans des hypothèses très générales, il y a lieu de les étendre encore, afin de pouvoir traiter complètement certains des problèmes qui vont suivre.

En premier lieu, nous avons supposé qu'au sein d'un fluide continu, de température uniforme, les éléments ne pouvaient différer les uns des autres que par leur densité; mais il est des cas où cette supposition n'est pas vérifiée; par exemple, au sein d'une dissolution saline ou d'un mélange gazeux, les éléments peuvent différer les uns des autres, non seulement par leur densité, mais encore par leur concentration ou leur composition; s'il s'agit d'une dissolution d'un seul sel dans un seul menstrue, ou du mélange de deux gaz, cette concentration ou cette composition s'exprime au moyen d'une seule variable; il en faut un plus grand nombre dans le cas où l'on considère un mélange de plus de deux corps; pour ne pas introduire d'interminables équations, nous supposerons simplement que l'état de chaque élément fluide peut être défini par sa densité et par une seule autre variable s.

En second lieu, nous avons étudié une masse fluide continue; mais on peut avoir affaire à une masse fluide dont la nature change brusquement au passage d'une surface de discontinuité.

Traitons d'abord le cas où le système se compose d'un seul fluide continu; ce fluide continu, nous le supposerons formé de deux corps α, β; la masse élémentaire dm se composera d'une masse dm_α du corps α et d'une masse dm_β du corps β; nous poserons

$$s = \frac{dm_\beta}{dm_\alpha} \tag{15}$$

et nous dirons que s est la *concentration* en un point de la masse dm.

L'état de la masse dm dépend non seulement de sa densité ρ, mais encore de sa concentration s. Le système admet un potentiel thermodynamique interne de la forme

$$\mathcal{F} = \int \rho\zeta(\rho, s)\,dv + \frac{1}{2}\int\int \rho\rho'\Psi(\rho, \rho', s, s', r)\,dv\,dv'. \tag{16}$$

Les diverses masses élémentaires du système sont soumises à des forces extérieures qui admettent pour potentiel la quantité

$$\mathcal{G} = \int \rho \mathrm{U}\,dv, \tag{17}$$

où U désigne une fonction de x, y, z, finie, uniforme et continue dans tout l'espace occupé par le fluide.

Enfin, chaque élément dS de la surface déformable du fluide est soumis à une force dont les composantes sont

$$P_x dS, \quad P_y dS, \quad P_z dS.$$

Posons

$$\text{(18)} \qquad V = \int \rho' \Psi(\rho, \rho', s, s', r)\, dv',$$

$$\text{(19)} \qquad \left\{ \begin{aligned} X_i &= -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dv', \\ Y_i &= -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dv', \\ Z_i &= -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dv', \end{aligned} \right.$$

$$\text{(20)} \qquad \mathcal{R} = -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial \rho} dv',$$

$$\text{(21)} \qquad \mathcal{S} = -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial s} dv',$$

$$\text{(22)} \qquad X_e = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Imaginons une modification infiniment petite du système : un point matériel ayant pour coordonnées x, y, z, au commencement de la modification, a pour coordonnées, à la fin de la modification,

$$x + Dy, \quad y + Dy, \quad z + Dz.$$

Sa densité, qui était ρ, est devenue $(\rho + D\rho)$; sa concentration, qui était s, est devenue $(s + Ds)$.

On en conclut sans peine qu'*au point fixe de l'espace* (x, y, z), la densité et la concentration, qui avaient pour valeurs ρ et s avant la modification, ont pour valeur, après la modification, $(\rho + \delta\rho)$ et

$(s + \delta s)$, $\delta\rho$ et δs étant donnés par les égalités

$$(23) \qquad \delta\rho = \mathrm{D}\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{D}x - \frac{\partial\rho}{\partial y}\mathrm{D}y - \frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{D}z,$$

$$(24) \qquad \delta s = \mathrm{D}s - \frac{\partial s}{\partial x}\mathrm{D}x - \frac{\partial s}{\partial y}\mathrm{D}y - \frac{\partial s}{\partial z}\mathrm{D}z.$$

Soient M_α, M_β les masses des corps α, β, que renferme le système; ces masses ont respectivement pour valeurs, en vertu de l'égalité (15) qui définit la concentration s,

$$(25) \qquad \mathrm{M}_\alpha = \int \frac{1}{1+s}\rho\, dv,$$

$$(26) \qquad \mathrm{M}_\beta = \int \frac{s}{1+s}\rho\, dv.$$

Ces masses doivent demeurer invariables par l'effet de la modification que le système éprouve, ce qu'expriment les deux égalités

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int \left[\frac{1}{1+s}\delta\rho - \frac{\rho}{(1+s)^2}\delta s\right] dv \\ &\quad + \mathbf{S} \frac{\rho}{1+s}[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, d\mathrm{S} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int \left[\frac{s}{1+s}\delta\rho + \frac{\rho}{(1+s)^2}\delta s\right] dv \\ &\quad + \mathbf{S} \frac{\rho s}{1+s}[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, d\mathrm{S} = 0, \end{aligned} \right.$$

n_e étant la normale à l'élément $d\mathrm{S}$ vers l'extérieur du fluide.

Ces relations lient les variations $\delta\rho$, δs, de la densité et de la concentration en chaque point de l'espace occupé par le fluide et les composantes $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ du déplacement aux limites du fluide; ce sont les seules conditions auxquelles ces variations soient assujetties.

Dans la modification considérée, les forces appliquées à la surface déformable S effectuent un travail

$$(29) \qquad d\mathfrak{T} = \mathbf{S}(\mathrm{P}_x \mathrm{D}x + \mathrm{P}_y \mathrm{D}y + \mathrm{P}_z \mathrm{D}z)\, d\mathrm{S}.$$

Le potentiel $\mathcal{G}$ des forces extérieures éprouve une variation

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{G} &= \int \mathrm{U}\,\delta\rho\,dv \\ &+ \mathbf{S}\,\rho\,\mathrm{U}\,[\cos(n_e, x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

Le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ éprouve une variation

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} - \rho\mathcal{A}\right]\delta\rho\,dv + \int\rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - s\right)\delta s\,dv \\ &+ \mathbf{S}\,\rho(\mathrm{V} + \zeta)[\cos(n_e, x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

Les conditions d'équilibre du système s'obtiendront en exprimant que l'on a

$$(32)\qquad \delta\mathcal{F} + \delta\mathcal{G} - d\mathcal{E} = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu non pas quels que soient $\delta\rho$, δs, $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$, mais seulement lorsque ces quantités sont liées par les équations (27) et (28). Si donc on désigne par λ et μ deux constantes convenablement choisies, l'égalité suivante aura lieu, quels que soient $\delta\rho$, δs, $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} + \mathrm{U} - \rho\mathcal{A} + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right]\delta\rho\,dv \\ &+ \int\rho\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} - s - \frac{\lambda - \mu}{(1+s)^2}\right]\delta s\,dv \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, x) - \mathrm{P}_x\right]\mathrm{D}x\,d\mathrm{S} \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, y) - \mathrm{P}_y\right]\mathrm{D}y\,d\mathrm{S} \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, z) - \mathrm{P}_z\right]\mathrm{D}z\,d\mathrm{S} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce résultat peut encore s'énoncer de la manière suivante :

1° *On a, en tout point de la surface déformable qui limite le*

fluide,

$$(34)\quad \begin{cases} P_x = \rho\left(V + U + \zeta + \dfrac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, x), \\ P_y = \rho\left(V + U + \zeta + \dfrac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, y), \\ P_z = \rho\left(V + U + \zeta + \dfrac{\lambda + \mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, z). \end{cases}$$

2° *On a, en tout point de la masse fluide,*

$$(35)\quad \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A} + \frac{\lambda + \mu s}{1+s} = 0,$$

$$(36)\quad \frac{\partial\zeta}{\partial s} - s - \frac{\lambda - \mu}{(1+s)^2} = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide.

Les conditions (34) peuvent encore s'énoncer ainsi :

La surface déformable du fluide est soumise à une pression normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, dont la grandeur est donnée par la valeur que prend, à cette surface, la quantité

$$(37)\quad \Pi = -\rho\left(V + U + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1+s}\right).$$

Cette quantité prend le nom de *pression à l'intérieur du fluide*. Moyennant l'introduction de cette pression, l'égalité (35) peut encore s'écrire

$$(38)\quad \Pi + \rho^2\mathcal{A} - \rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} = 0,$$

égalité dans laquelle on reconnaît l'égalité (8), qui avait été établie pour un cas plus particulier.

Les égalités (35), (36), (37), (38) conduisent aisément à la proposition suivante :

Les surfaces équipotentielles, les surfaces d'égale pression, les

surfaces d'égale densité et les surfaces d'égale concentration forment, en général, quatre familles de surfaces distinctes; ces quatre familles n'en forment plus qu'une dans le cas où l'on a identiquement

$$\mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{S} = 0, \tag{39}$$

c'est-à-dire dans le cas où la fonction Ψ est une simple fonction de r (cas des actions newtoniennes).

Occupons-nous maintenant du cas où le fluide considéré est formé de deux masses continues 1 et 2 séparées par une surface de discontinuité Σ. Le fluide 1 est formé par le mélange de deux corps α_1, β_1; le fluide 2 par le mélange de deux autres corps α_2, β_2; les concentrations s_1, s_2 seront définies par des égalités analogues à l'égalité (15).

Les corps α_1, β_1, α_2, β_2 ont des masses M_{α_1}, M_{β_1}, M_{α_2}, M_{β_2} qui doivent demeurer invariables en toute modification du système, ce qu'expriment les conditions

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{1}{1+s_1}\delta\rho_1 - \frac{\rho_1}{(1+s_1)^2}\delta s_1\right]dv \\ &\quad + \mathbf{S}\frac{\rho_1}{1+s_1}\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right]d\mathrm{S}_1 \\ &\quad - \mathbf{S}\frac{\rho_1}{1+s_1}\left[\cos(n_1,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_1,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_1,z)\,\mathrm{D}z\right]d\Sigma = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{s_1}{1+s_1}\delta\rho_1 + \frac{\rho_1}{(1+s_1)^2}\delta s_1\right]dv_1 \\ &\quad + \mathbf{S}\frac{\rho_1 s_1}{1+s_1}\left[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z\right]d\mathrm{S}_1 \\ &\quad - \mathbf{S}\frac{\rho_1 s_1}{1+s_1}\left[\cos(n_1,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_1,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_1,z)\,\mathrm{D}z\right]d\Sigma = 0 \end{aligned}\right.$$

et deux autres égalités qui diffèrent des précédentes en ce que l'indice 2 y remplace l'indice 1; nous les nommerons (40 *bis*) et (41 *bis*). En un point de la surface Σ, n_1 désigne la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 1 et n_2 la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 2.

Le travail des forces appliquées à la surface déformable se compose de deux termes semblables au second membre de l'égalité (29); l'un

se rapporte à la surface S_1, l'autre à la surface S_2. Nous en désignerons l'expression par (29 *bis*).

La variation éprouvée par le potentiel des actions qui s'exercent sur les divers éléments de masse du fluide est donnée non plus par l'égalité (30), mais par l'égalité

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}\delta\mathcal{G} = & \int \mathrm{U}\,\delta\rho_1\,dv_1 + \int \mathrm{U}\,\delta\rho_2\,dv_2\\ & + \mathbf{S}\,\rho_1 \mathrm{U}[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}_1\\ & + \mathbf{S}\,\rho_2 \mathrm{U}[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}_2\\ & - \mathbf{S}\,\rho_1 \mathrm{U}[\cos(n_1, x)\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma\\ & - \mathbf{S}\,\rho_2 \mathrm{U}[\cos(n_2, x)\mathrm{D}x + \cos(n_2, y)\mathrm{D}y + \cos(n_2, z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma.\end{aligned}\right.$$

La transformation qui, de l'égalité (30), sert à déduire l'égalité (42), permettra, de l'égalité (31), de déduire l'expression de $\delta\mathcal{F}$ applicable au cas qui nous occupe; il suffira d'écrire successivement deux termes semblables au second membre de l'égalité (31), en les affectant, l'un de l'indice 1, l'autre de l'indice 2, et d'y ajouter

$$\begin{aligned}& - \mathbf{S}\,\rho_1(\mathrm{V}_1 + \zeta_1)[\cos(n_1, x)\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma\\ & - \mathbf{S}\,\rho_2(\mathrm{V}_2 + \zeta_2)[\cos(n_2, x)\mathrm{D}x + \cos(n_2, y)\mathrm{D}y + \cos(n_2, z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma.\end{aligned}$$

Nous désignerons par (31 *bis*) l'égalité ainsi obtenue.

Les conditions d'équilibre s'obtiendront en écrivant que l'on a

$$\partial\mathcal{F} + \partial\mathcal{G} - d\mathfrak{T} = 0,$$

pour toute variation du fluide compatible avec les conditions (40), (40 *bis*) et (41 *bis*). Ces conditions seront les suivantes :

1° *Il existe deux constantes convenablement choisies* λ_1, μ_1, *telles*

que l'on ait, en tout point du fluide 1,

$$(43) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_1}(\rho_1 \zeta_1) + V_1 + U - \rho_1 A_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1} = 0,$$

$$(44) \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1} - S_1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{(1 + s_1)^2} = 0.$$

En tout point de la surface S_1 *est appliquée une force normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et dont la grandeur égale la valeur prise au point considéré par la fonction*

$$(45) \qquad \Pi_1 = -\rho_1 \left(V_1 + U + \zeta_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1} \right).$$

2° *Il existe deux constantes convenablement choisies* λ_2, μ_2, *telles que l'on ait, en tout point du fluide* 2,

$$(43\ bis) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_2}(\rho_2 \zeta_2) + V_2 + U - \rho_2 A_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2} = 0,$$

$$(44\ bis) \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial s_2} - S_2 - \frac{\lambda_2 - \mu_2}{(1 + s_2)^2} = 0.$$

En tout point de la surface S_2 *est appliquée une force normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et dont la grandeur égale la valeur prise au point considéré par la fonction*

$$(45\ bis) \qquad \Pi_2 = -\rho_2 \left(V_2 + U + \zeta_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2} \right).$$

3° *En tout point de la surface de discontinuité* Σ *qui sépare les fluides* 1 *et* 2, *on a*

$$(46) \qquad \rho_1 \left(V_1 + U + \zeta_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1} \right) = \rho_2 \left(V_2 + U + \zeta_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2} \right).$$

En vertu des égalités (45) et (45 *bis*), l'égalité (46) peut encore s'écrire

$$(47) \qquad \Pi_1 = \Pi_2.$$

Les pressions Π_1, Π_2 sont *deux fonctions analytiques différentes*, définies, l'une à l'intérieur du fluide 1, l'autre à l'intérieur du fluide 2. Mais ces fonctions se soudent l'une à l'autre *sans discontinuité* au passage de la surface Σ.

On verrait sans peine qu'on se tromperait, en général, en énonçant une des propositions suivantes :

Le long de la surface Σ, la pression garde une valeur constante;

Les densités ρ_1, ρ_2 gardent des valeurs constantes;

Les concentrations s_1, s_2 gardent des valeurs constantes;

Les fonctions potentielles $(V_1 + U)$, $(V_2 + U)$ gardent des valeurs constantes.

Toutes ces propositions, fausses en général, deviennent vraies à la fois, lorsque l'on a les identités

$$V_1 = V_2,$$

$$\mathcal{A}_1 = 0, \qquad S_1 = 0, \qquad \mathcal{A}_2 = 0, \qquad S_2 = 0,$$

c'est-à-dire dans le cas des actions newtoniennes.

§ 3. — **Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. Variation seconde du potentiel thermodynamique.**

Supposons que les surfaces déformables des fluides 1 et 2 soient soumises à une même pression normale et uniforme P. Le travail de cette pression deviendra, en vertu de l'égalité (29 *bis*),

$$\begin{aligned} P\Big\{ & \mathsf{S}\,[\cos(n_e, x)\,Dx + \cos(n_e, y)\,Dy + \cos(n_e, z)\,Dz]\,dS_1 \\ & + \mathsf{S}\,[\cos(n_e, x)\,Dx + \cos(n_e, y)\,Dy + \cos(n_e, z)\,Dz]\,dS_2\Big\} \end{aligned}$$

ou bien

$$-\,P\,DW,$$

en désignant par W le volume total du système, par DW l'accroissement que subit ce volume durant la modification du système.

Si la pression P *est maintenue constante*, ce travail dépend d'un potentiel

$$\mathfrak{H} = \mathrm{PW}, \tag{48}$$

et le système admet un potentiel thermodynamique total

$$\Phi = \mathfrak{F} + \mathfrak{G} + \mathfrak{H}. \tag{49}$$

Nous admettrons la proposition suivante, qui n'est qu'en partie démontrée :

Pour que le système soit en équilibre stable, il faut et il suffit que le potentiel thermodynamique total soit un minimum.

On exprimera donc que le système est en équilibre stable en écrivant que l'on a, à la fois,

$$\delta\Phi = 0, \tag{50}$$

$$\delta^2\Phi > 0, \tag{51}$$

pour toute modification du système compatible avec les liaisons.

Bornons-nous, pour le moment, à étudier le cas d'un *fluide continu*.

Dans ce cas, l'expression de $\delta\Phi$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \delta\Phi = & \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} + \mathrm{U} - \rho\mathfrak{A}\right]\delta\rho\, dv \\ & + \int\left[\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho s\right]\delta s\, dv \\ & + \mathbf{S}\left[\rho(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta) + \mathrm{P}\right] \\ & \quad \times \left[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z\right] d\mathrm{S}. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Il est très facile de voir que les équations d'équilibre, jointes aux conditions (27) et (28), rendent égal à 0 le second membre de cette égalité (52).

Soient, en un point (x, y, z) de l'espace, V la valeur au début de la modification de la fonction que désigne cette lettre, et $(V + \delta V)$ la valeur de cette fonction au même point à la fin de la modification.

En vertu des égalités (18), (20) et (21), nous pourrons écrire

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \delta V = &- \mathcal{A}\,\delta\rho - s\,\delta s \\ &+ \int\left(\Psi + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' + \int\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial s'}\delta s'\,dv' \\ &+ \mathbf{S}\,\rho'\Psi[\cos(n'_e, x)\,\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\,\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\,\mathrm{D}z']\,d\mathrm{S}', \end{aligned}\right.$$

n'_e étant la normale à l'élément dS' de la surface S vers l'extérieur du fluide; ρ' la densité du fluide au voisinage de cet élément; $\mathrm{D}x'$, $\mathrm{D}y'$, $\mathrm{D}z'$ les composantes du déplacement d'un point de cet élément.

Nous aurons, de même,

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \delta(\rho\mathcal{A}) = &\left(\mathcal{A} + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}\delta s \\ &- \rho\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' - \rho\int\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial s'}\delta s'\,dv' \\ &- \rho\,\mathbf{S}\,\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}[\cos(n'_e, x)\,\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\,\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\,\mathrm{D}z']\,d\mathrm{S}', \end{aligned}\right.$$

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \delta(\rho s) = &\left(s + \rho\frac{\partial s}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial s}{\partial s}\delta s \\ &- \rho\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' - \rho\int\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'}\delta s'\,dv' \\ &- \rho\,\mathbf{S}\,\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial s}[\cos(n'_e, x)\,\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\,\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\,\mathrm{D}z']\,d\mathrm{S}'. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (53), (54) et (55) donnent une interprétation simple de la quantité

$$\begin{aligned} &\int[\delta V - \delta(\rho\mathcal{A})]\,\delta\rho\,dv - \int\delta(\rho s)\,\delta s\,dv \\ &\quad + \mathbf{S}\,\rho\,\delta V[\cos(n_e, x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

Considérons trois fluides fictifs a, b, c ayant tous trois, comme le

classique fluide électrique, la propriété de pouvoir offrir, tantôt une densité positive, tantôt une densité négative.

Le fluide a est distribué dans tout l'espace occupé par le fluide réel et sa densité en chaque point est $\delta\rho$.

Le fluide b est distribué en chaque point de l'espace occupé par le fluide réel avec la densité $\rho\delta s$.

Le fluide c est distribué seulement à la surface qui limite le fluide réel, et sa densité superficielle est

$$\rho[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z].$$

A une modification déterminée du fluide réel correspond une distribution bien déterminée des trois fluides fictifs.

Soient deux points M, M', pris dans le fluide réel ou à sa surface; soit r la distance MM'; soient ρ, ρ', s, s' les densités et les concentrations du fluide réel aux points M et M'.

Supposons que deux quantités q_a, q'_a du fluide a soient concentrées aux points M, M'; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right)q_a q'_a.$$

Supposons que deux quantités q_b, q'_b du fluide b soient concentrées aux points M, M'; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'}q_b q'_b.$$

Concentrons au point M une quantité q_a du fluide a, au point M une quantité q'_b du fluide b; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s'} + \rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial s'}\right)q_a q'_b.$$

Aux deux points M, M', concentrons deux quantités q_c, q'_c du

fluide c; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\Psi q_c q'_c.$$

Au point M, concentrons une quantité q_c du fluide c et au point M' une quantité q'_a du fluide a; nous admettrons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho' \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'}\right) q_c q'_a.$$

Au point M, concentrons une quantité q_c du fluide c, et au point M une quantité q'_b du fluide b; nous admettrons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s'} q_c q'_b.$$

Supposons que les rapports

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial \rho'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial s} \Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial s'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2}{d\rho\, \partial \rho'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial s'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2}{\partial \rho\, \partial s'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r)$$

ne croissent pas au delà de toutes limites lorsque r tend vers 0; nous pourrons appliquer aux actions mutuelles que nous venons d'énumérer les théorèmes généraux que nous avons démontrés dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*.

Soit Y le potentiel de toutes ces actions mutuelles. Il est très facile

de voir que l'on a

$$
(56)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int [\delta V - \delta(\rho\mathfrak{A})]\delta\rho\, dv - \int \delta(\rho s)\delta s\, dv \\
&+ \mathbf{S}\, \rho\delta V\, [\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS \\
&= - \int \left[\left(2\mathfrak{A} + \rho\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\rho}\right)(\delta\rho)^2 + \left(s + \rho\frac{\partial s}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial s}\right)\delta\rho\,\delta s + \rho\frac{\partial s}{\partial s}(\delta s)^2\right] dv \\
&- \mathbf{S}\, \rho(\mathfrak{A}\delta\rho + s\delta s)[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS \\
&+ 2\mathrm{Y}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous pouvons, désormais, former l'expression générale de $\delta^2\Phi$; remarquons que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\rho V + \rho U + \rho\zeta) &= \rho\delta V + \left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial s}\delta s \\
&+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathfrak{A}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \left(\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho s\right)\frac{\partial s}{\partial x} - \rho(X_i + X_e)\right]\mathrm{D}x \\
&+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathfrak{A}\right)\frac{d\rho}{dy} + \left(\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho s\right)\frac{\partial s}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e)\right]\mathrm{D}y \\
&+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathfrak{A}\right)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \left(\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho s\right)\frac{\partial s}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e)\right]\mathrm{D}z
\end{aligned}
$$

et nous aurons, en tenant compte des égalités (23) et (24)

$$
(57)\quad
\begin{aligned}
\delta^2\Phi = \; &\int \left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathfrak{A}\right)\delta^2\rho\, dv && (1) \\
&+ \int \rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - s\right)\delta^2 s\, dv && (2) \\
&+ \mathbf{S}\left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathfrak{A}\right)\delta\rho + \rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - s\right)\delta s\right] \\
&\qquad \times \; [\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS && (3) \\
&+ \mathbf{S}\left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathfrak{A}\right)\mathrm{D}\rho + \rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - s\right)\mathrm{D}s\right] \\
&\qquad \times \; [\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS && (4) \\
&+ \mathbf{S}\, [\rho(V + U + \zeta) - \mathrm{P}] \\
&\qquad \times \; \mathrm{D}\{[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, dS\} && (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\Big[\Big(2\,\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{B}-\rho\,\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\rho}\Big)(\delta\rho)^2\\
&\qquad+\Big(2\,\frac{\partial\zeta}{\partial s}+2\,\rho\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s}-2\mathcal{S}-\rho\,\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho}-\rho\,\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial s}\Big)\,\delta\rho\,\delta s\\
&\qquad\qquad+\Big(\rho\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}-\rho\,\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}\Big)(\delta s)^2\Big]\,dv \qquad (6)\\
&-\mathbf{S}\,\rho\,[(X_i+X_e)\,Dx+(Y_i+Y_e)\,Dy+(Z_i+Z_e)\,Dz]\\
&\qquad\times[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS \qquad (7)\\
&+2\,Y. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Cette expression générale de $\delta^2\Phi$ se simplifie beaucoup lorsqu'on suppose que l'état initial du système est un état d'équilibre. Dans ce cas, en vertu des égalités (34), (35), (36), les termes (1), (2), (3), (4), (5), au second membre de l'égalité (57), peuvent s'écrire

$$
(58)\left\{
\begin{aligned}
&-\lambda\Big(\int\Big[\frac{\delta^2\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\Big]\,dv\\
&\qquad+\mathbf{S}\Big[\frac{\delta\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\qquad+\mathbf{S}\Big[\frac{D\rho}{1+s}-\frac{\rho\,Ds}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\qquad+\mathbf{S}\,\frac{\rho}{1+s}\,D\big\{[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\big\}\Big),\\
&-\mu\Big(\int\Big[\frac{s\,\delta^2\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\Big]\,dv\\
&\qquad+\mathbf{S}\Big[\frac{s\,\delta\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\qquad+\mathbf{S}\Big[\frac{s\,D\rho}{1+s}+\frac{\rho\,Ds}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\qquad+\mathbf{S}\,\frac{\rho s}{1+s}\,D\big\{[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\big\}\Big).
\end{aligned}
\right.
$$

Mais, les égalités (27) et (28) devant être constamment vérifiées, les variations de leurs premiers membres doivent être égales à o, ce qui donne

$$
(59)\left\{\begin{aligned}
&-\int \frac{2}{(1+s)^2}\left[\delta\rho\,\delta s - \frac{\rho}{1+s}(\delta s)^2\right] dv \\
&+\int \left[\frac{\delta^2\rho}{1+s} - \frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\right] dv \\
&+ \mathbf{S}\left[\frac{\delta\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S} \\
&+ \mathbf{S}\left[\frac{\mathrm{D}\rho}{1+s} - \frac{\rho\,\mathrm{D}s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S} \\
&+ \mathbf{S}\qquad \frac{\rho}{1+s}\,\mathrm{D}\{[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\} = 0;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(60)\left\{\begin{aligned}
&\int \frac{2}{(1+s)^2}\left[\delta\rho\,\delta s - \frac{\rho}{1+s}(\delta s)^2\right] dv \\
&+\int \left[\frac{s\,\delta^2\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\right] dv \\
&+ \mathbf{S}\left[\frac{s\,\delta\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S} \\
&+ \mathbf{S}\left[\frac{s\,\mathrm{D}\rho}{1+s} + \frac{\rho\,\mathrm{D}s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S} \\
&+ \mathbf{S}\qquad \frac{\rho s}{1+s}\,\mathrm{D}\{[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Moyennant ces égalités (59) et (60), l'expression (58) peut s'écrire

$$
(61)\qquad \int \left[\frac{2(\mu-\lambda)}{(1+s)^2}\,\delta\rho\,\delta s + 2\rho\,\frac{\lambda-\mu}{(1+s)^3}(\delta s)^2\right] dv.
$$

Si dans l'égalité (57), nous remplaçons les cinq premiers termes du second membre par l'expression (61), nous aurons l'égalité

$$
(62)\left\{\begin{aligned}
\delta^2\Phi = \int \Bigg\{ &\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - 2\mathfrak{b} - \rho\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial\rho}\right)(\delta\rho)^2 \\
&+ \left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + 2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \mathfrak{s} - \rho\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial s} - \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]\delta\rho\,\delta s \\
&+ \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} - \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial s} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right](\delta s)^2\Bigg\}\,dv \qquad (1) \\
&- \mathbf{S}\,\rho[(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e)\,\mathrm{D}x + (\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e)\,\mathrm{D}y + (\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e)\,\mathrm{D}z] \\
&\qquad \times[\cos(n_e,x)\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S} \qquad (2) \\
&+ 2\Upsilon, \qquad (3)
\end{aligned}\right.
$$

qui représente la variation seconde du potentiel thermodynamique du système dans le cas où l'état initial du système est un état d'équilibre.

Le terme (2) peut se mettre sous une forme un peu différente.

L'équation (7), appliquée à la surface S, le long de laquelle la pression garde une valeur constante, nous apprend que le segment dont les composantes sont

$$(X_i+X_e),\quad (Y_i+Y_e),\quad (Z_i+Z_e)$$

est normal à la surface S. Soit N ce vecteur, compté positivement dans le sens qui pénètre vers l'intérieur du fluide. On aura

$$\begin{aligned} X_i+X_e &= -\,N\cos(n_e,x),\\ Y_i+Y_e &= -\,N\cos(n_e,y),\\ Z_i+Z_e &= -\,N\cos(n_e,z), \end{aligned}$$

et le terme (2), au second membre de l'égalité (62), pourra s'écrire

$$+\int \rho N[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]^2\,dS. \quad (2\,bis)$$

Dans le cas où nous avons affaire non plus à un fluide continu, mais à deux fluides 1 et 2, séparés par une surface de discontinuité Σ, l'expression de $\delta^2\Phi$ prend une forme plus compliquée.

Il nous faut tout d'abord, dans ce cas, écrire les termes (1) et (2) en affectant de l'indice 1 les quantités qui y figurent, puis deux termes semblables où l'indice 2 remplace l'indice 1; ensuite, nous devons introduire un nouveau terme, qui va nous arrêter un instant.

Soient M_1, M_2 deux points infiniment voisins situés l'un au sein du fluide 1, l'autre au sein du fluide 2. Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les valeurs de (X_i+X_e), (Y_i+Y_e), (Z_i+Z_e) au point M_1; désignons par X_2, Y_2, Z_2 les valeurs des mêmes quantités au point M_2; le terme en question pourra s'écrire

$$\begin{aligned} +\int &[(\rho_1X_1-\rho_2X_2)Dx+(\rho_1Y_1-\rho_2Y_2)Dy+(\rho_1Z_1-\rho_2Z_2)Dz]\\ &\times[\cos(n_1,x)Dx+\cos(n_1,y)Dy+\cos(n_1,z)Dz]\,dS. \quad (4) \end{aligned}$$

Enfin le terme Y subira des modifications analogues à celles que nous venons d'indiquer; il est inutile de les étudier en détail.

Le terme (4) peut se transformer.

Le long de la surface Σ, on a

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

et, par conséquent, pour tout déplacement effectué sur la surface Σ,

$$d\Pi_1 - d\Pi_2 = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (7),

$$(\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2)\,dx + (\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2)\,dy + (\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2)\,dz = 0.$$

Cette égalité nous apprend que le segment qui a pour composantes

$$\begin{aligned}&\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2,\\ &\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2,\\ &\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2,\end{aligned}$$

est normal à la surface Σ.

Soit N_1 la projection, sur la normale n_1, du segment dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1; soit N_2 la projection, sur la normale n_2, du segment dont les composantes sont X_2, Y_2, Z_2; la projection du même segment sur la normale n_1 sera $-N_2$. Nous aurons donc

$$\begin{aligned}\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2 &= (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, x),\\ \rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2 &= (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, y),\\ \rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2 &= (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, z)\end{aligned}$$

et le terme (4) pourra s'écrire

$$+ \mathbf{S}(\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)[\cos(n_1, x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\,\mathrm{D}z]^2\,dS. \qquad (4\ bis)$$

§ 4. — Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. — Conditions nécessaires.

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\delta^2\Phi > 0, \tag{51}$$

$\delta^2\Phi$ étant donné par l'égalité (62), pour toute modification du fluide qui satisfait aux conditions (40) et (41).

Nous nous contenterons d'indiquer certaines conditions qui doivent être nécessairement remplies pour qu'il en soit ainsi; quant à l'énumération de toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, elle se heurte à d'extrêmes difficultés; c'est seulement dans certains cas particuliers que ces difficultés peuvent être surmontées; nous rencontrerons plus loin un de ces cas.

Première condition nécessaire. — *La forme quadratique*

$$(63)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{T} = {} & \left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - 2\mathcal{A} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)\mathrm{A}^2 \\ & + \left[2\frac{\partial\zeta}{\partial s} + 2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - 2\mathcal{S} - \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s} - \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]\mathrm{AB} \\ & + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} - \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right]\mathrm{B}^2 \end{aligned} \right.$$

ne doit, en aucun point M *du volume occupé par le fluide et pour aucun système de valeurs des variables* A *et* B, *prendre une valeur négative.*

Supposons, en effet, qu'au point M, pour un certain système de valeurs A, B des variables A et B, la forme (63) prenne une valeur négative et montrons qu'il sera possible alors de faire prendre à $\delta^2\Phi$ une valeur négative.

Entourons le point M d'une surface fermée σ entourant le volume w.

Il est clair que l'on peut, d'une infinité de manières, déterminer une fonction u qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° La fonction u est uniforme, finie et continue à l'intérieur du domaine ϖ;

2° Elle est égale à 0 en tout point de la surface σ;

3° Elle vérifie les égalités

$$\int_{\varpi}\left[\frac{1}{1+s} - \frac{\rho}{(1+s)^2}\right] u\,d\varpi = 0, \tag{64}$$

$$\int_{\varpi}\left[\frac{s}{1+s} + \frac{\rho}{(1+s)^2}\right] u\,d\varpi = 0; \tag{65}$$

4° Lorsque la surface σ se contracte autour du point M par une suite déterminée de formes, le rapport

$$R = \frac{1}{\varpi}\int_{\varpi} T u^2\,dv \tag{66}$$

tend vers une limite finie différente de 0.

A et B demeurant constants, T varie d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide continu; T étant négatif au point M, par hypothèse, on peut prendre le volume ϖ assez petit pour que T soit négatif en tout point de ce volume; R sera alors assurément négatif.

A l'intérieur de l'espace ϖ, distribuons deux fluides fictifs, i et j, le premier, i, de densité Au, le second, j, de densité Bu.

Imaginons que les actions mutuelles de deux masses q_i, q_i', du fluide i, admettent pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right) q_i q_i';$$

que les actions mutuelles de deux masses q_j, q_j', du fluide j, admettent pour potentiel

$$\rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'} q_j q_j';$$

qu'une masse q_i du fluide i et une masse q_j', du fluide j, exercent l'une

sur l'autre des actions mutuelles admettant pour potentiel

$$\left(\rho' \frac{\partial \Psi}{\partial s'} + \rho\rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial s'}\right) q_i q_j'.$$

Soit $\mathfrak{T}$ le potentiel de toutes ces actions fictives.

En vertu des hypothèses faites sur la fonction Ψ et ses dérivées partielles, lorsque la surface σ se contracte autour du point M, le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\varpi^2}$ ne croît pas au delà de toute limite, en sorte que le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\varpi}$ tend vers zéro.

Cela posé, considérons la quantité

$$(67) \qquad \varphi = \int_{\varpi} \mathrm{T} u^2 \, d\varpi + 2\mathfrak{T},$$

qui peut s'écrire, en vertu de l'égalité (66),

$$\varphi = \varpi\left(\mathrm{R} + \frac{2\mathfrak{T}}{\varpi}\right).$$

Lorsque le volume ϖ tend vers zéro par une suite de formes bien déterminées, R tend vers une limite finie et négative, tandis que $\frac{\mathfrak{T}}{\varpi}$ tend vers zéro. Nous pouvons donc assurément prendre le volume ϖ assez petit pour que φ soit négatif.

Cela posé, considérons une modification du fluide définie de la manière suivante :

1° En tout point de l'espace extérieur à la surface σ ou de cette surface même, on a

$$\mathrm{D}x = 0, \qquad \mathrm{D}y = 0, \qquad \mathrm{D}z = 0, \qquad \mathrm{D}s = 0, \qquad \mathrm{D}\rho = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta\rho = 0, \qquad \delta s = 0.$$

2° En tout point du domaine ϖ, on a

$$\delta\rho = u\,\delta t, \qquad \delta s = u\,\delta t,$$

δt étant une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

En vertu des conditions (64) et (65), cette modification vérifie les égalités (27) et (28); c'est donc une modification virtuelle acceptable. Dans une telle modification, on a évidemment

$$\delta^2\Phi = \varphi(\delta t)^2,$$

en sorte que $\delta^2\Phi$ est négatif. Par là, la proposition énoncée est démontrée.

Deuxième condition nécessaire. — *La quantité* N *n'est négative en aucun point de la surface* S *qui limite le fluide.*

Supposons, en effet, que la quantité N prenne une valeur négative en un point M de la surface déformable S du fluide; nous allons voir que l'on pourrait imposer au fluide une modification qui ferait prendre à $\delta^2\Phi$ une valeur négative.

Autour du point M, traçons sur la surface S une aire σ; déterminons une fonction u, variable d'un point à l'autre de l'aire σ, et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elle est uniforme, finie et continue en tout point de l'aire σ;

2° Elle s'annule tout le long du contour de l'aire σ;

3° Elle vérifie les conditions

$$\text{(68)} \qquad \mathsf{S}_\sigma \frac{\rho}{1+s}\, u\, d\sigma = 0,$$

$$\text{(69)} \qquad \mathsf{S}_\sigma \frac{\rho s}{1+s}\, u\, d\sigma = 0.$$

4° Lorsque le contour de l'aire σ se contracte pour venir s'évanouir au point M par une suite bien déterminée de formes, le rapport

$$\text{(70)} \qquad R = \frac{1}{\sigma}\mathsf{S}_\sigma \rho N u^2\, d\sigma$$

tend vers une limite finie différente de zéro.

La quantité N est, par hypothèse, négative au point M. Si la surface S a une courbure finie au voisinage du point M, la quantité N varie d'une manière continue au voisinage de ce point; on peut donc

prendre l'aire σ assez petite pour que N soit négatif en tout point de cette aire; R sera alors assurément négatif.

Sur l'aire σ, distribuons un fluide fictif ayant pour densité *superficielle*, en chaque point de l'aire, la valeur correspondante de u; imaginons que deux quantités q, q' de ce fluide fictif exercent des actions mutuelles admettant pour potentiel

$$\Psi qq'.$$

Formons le potentiel $\mathfrak{F}$ des actions mutuelles de la distribution fictive répandue sur l'aire σ.

En vertu des hypothèses faites sur la fonction Ψ, lorsque la surface σ tend à s'évanouir au point M, le rapport $\frac{\mathfrak{F}}{\sigma^2}$ ne croît pas au delà de toute limite, en sorte que le rapport $\frac{\mathfrak{F}}{\sigma}$ tend vers zéro.

Cela posé, considérons la quantité

$$(71) \qquad \varphi = \mathrm{S}_\sigma \rho N u^2 d\sigma + 2\mathfrak{F},$$

que l'on peut écrire, en vertu de l'égalité (70),

$$\varphi = \sigma\left(R + 2\frac{\mathfrak{F}}{\sigma}\right).$$

Lorsque l'aire σ tend vers zéro par une suite de formes bien déterminées, R tend vers une limite finie et négative, tandis que $\frac{\mathfrak{F}}{\sigma}$ tend vers zéro; on peut donc prendre l'aire σ assez petite pour que φ soit assurément négatif.

Prenons une telle aire σ et imposons au fluide la modification suivante :

1° En tout point intérieur à la masse fluide, on a

$$\delta\rho = 0, \qquad \delta s = 0;$$

2° En tout point de la surface S extérieur à σ ou situé sur le contour

de l'aire σ, on a

$$Dx = 0, \qquad Dy = 0, \qquad Dz = 0;$$

3° Dx, Dy, Dz varient d'une manière continue à l'intérieur de l'aire σ, et l'on a

$$\cos(n_e, x)Dx + \cos(n_e, y)Dy + \cos(n_e, z)Dz = u\delta t,$$

δt étant une quantité infiniment petite qui a la même valeur en tous les points de l'aire σ.

Nous aurons ainsi défini une modification virtuelle acceptable du fluide, car, en vertu des égalités (68) et (69), les conditions (27) et (28) seront remplies. Or, dans cette modification, on aura

$$\delta^2\Phi = \varphi(\delta t)^2,$$

en sorte que $\delta^2\Phi$ sera négatif, ce qui démontre la proposition énoncée.

TROISIÈME CONDITION NÉCESSAIRE. — *Si la masse fluide est formée de deux fluides distincts* 1 *et* 2, *séparés par une surface de discontinuité* Σ, *la quantité* $(\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)$ *ne doit être négative en aucun point de la surface.*

Cette proposition se démontre comme la précédente.

§ 5. — Conséquence de la première condition nécessaire.

Nous avons, en vertu des égalités (22),

$$dU = -(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz).$$

Les égalités (18), (19), (20), (21) nous donnent

$$dV = -(X_i dx + Y_i dy + Z_i dz + \lambda d\rho + s ds).$$

L'égalité (20) nous donne

$$\begin{aligned} d\lambda = &- d\rho \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} dv' - ds \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial s} dv' \\ &- dx \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dv' - dy \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dv' - dz \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dv', \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (19), (20), (21),

$$d\mathcal{A} = \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}ds + \frac{\partial X_i}{\partial\rho}dx + \frac{\partial Y_i}{\partial\rho}dy + \frac{\partial Z_i}{\partial\rho}dz.$$

On trouverait de même

$$d\mathcal{S} = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}ds + \frac{\partial X_i}{\partial s}dx + \frac{\partial Y_i}{\partial s}dy + \frac{\partial Z_i}{\partial s}ds.$$

Considérons l'égalité (35), vérifiée en tout point du fluide, et différentions-la en tenant compte des égalités précédentes et des identités

$$\frac{\partial X_e}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial Y_e}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial Z_e}{\partial\rho} = 0.$$

Nous trouvons

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - 2\mathcal{A} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)d\rho \\ &\quad + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \mathcal{S} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right)ds \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial\rho}[\rho(X_i + X_e)]dx \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial\rho}[\rho(Y_i + Y_e)dy] - \frac{\partial}{\partial\rho}[\rho(Z_i + Z_e)dz] = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions par ρ les deux membres de l'égalité (36), vérifiée en tous les points du fluide, et différentions-la, en tenant compte des égalités précédentes et des identités

$$\frac{\partial X_e}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial Y_e}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial Z_e}{\partial s} = 0.$$

Nous trouvons

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s\,\partial\rho} - \mathcal{S} - \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right)d\rho \\ &\quad + \left[\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2\rho(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right]ds - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(X_i + X_e)]dx \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(Y_i + Y_e)dy] - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(Z_i + Z_e)dz] = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (72) par $d\rho$, les deux membres de l'égalité (73) par ds, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus : nous trouverons une égalité que nous pourrons écrire

$$
(74)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - 2\mathcal{A} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)(d\rho)^2 \\
&+ \left[2\frac{\partial\zeta}{\partial s} + 2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s\,\partial\rho} - 2\mathcal{S} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s} - s\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho} - \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]d\rho\,ds \\
&+ \left[\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} - \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right](ds)^2 \\
={}& \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(X_i + X_e))d\rho + \frac{\partial}{\partial s}(\rho(X_i + X_e))ds\right]dx \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Y_i + Y_e))d\rho + \frac{\partial}{\partial s}(\rho(Y_i + Y_e))ds\right]dy \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Z_i + Z_e))d\rho + \frac{\partial}{\partial s}(\rho(Z_i + Z_e))ds\right]dz.
\end{aligned}
\right.
$$

La première condition nécessaire, démontrée au paragraphe précédent, nous montre alors que l'on aura, pour tout segment infiniment petit tracé à l'intérieur du fluide,

$$
(75)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(X_i + X_e))d\rho + \frac{\partial}{\partial s}(\rho(X_i + X_e))ds\right]dx \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Y_i + Y_e))d\rho + \frac{\partial}{\partial s}(\rho(Y_i + Y_e))ds\right]dy \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Z_i + Z_e))d\rho + \frac{\partial}{\partial s}(\rho(Z_i + Z_e))ds\right]dz \geq 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette conséquence de notre première condition permettrait, on le voit sans peine, de retrouver la troisième condition en regardant les fluides 1 et 2, non plus comme séparés par une surface géométrique, mais comme reliés l'un à l'autre par une couche de passage continue et extrêmement mince.

§ 6. — Cas des actions newtoniennes.

Nous avons donné, dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, le nom d'*actions newtoniennes* aux actions pour lesquelles la fonction Ψ dépend de la seule variable r.

Pour de telles actions, on a

$$(76)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{A} = 0, & \mathcal{S} = 0, \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial X_i}{\partial s} = 0, \\ \dfrac{\partial Y_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial Y_i}{\partial s} = 0, \\ \dfrac{\partial Z_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial Z_i}{\partial s} = 0. \end{array}\right.$$

Voyons ce que deviennent, pour de telles actions, nos diverses conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre.

La deuxième condition, par laquelle nous commencerons, ne change pas de forme; *en aucun des points de la surface qui limite le fluide, la force, tant intérieure qu'extérieure, appliquée à un élément de masse du fluide, ne peut être dirigée vers l'extérieur du fluide.*

La troisième condition se simplifie si l'on observe que, dans le cas des actions newtoniennes, les quantités $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ varient d'une manière continue lorsque l'on traverse la surface de contact de deux fluides différents 1 et 2. On aura, dès lors,

$$N_1 + N_2 = 0,$$

et la troisième condition exigera que l'on ait, en tout point de la surface Σ,

$$(\rho_1 - \rho_2) N_1 \geqq 0.$$

A la surface de contact de deux fluides différents, la force, tant intérieure qu'extérieure, ne peut jamais être dirigée du fluide le plus dense vers le fluide le moins dense.

La première condition prendra simplement, en vertu des égalités (76), la forme suivante :

La forme quadratique en A, B

$$(77)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{T} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\mathrm{A}^2 + 2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]\mathrm{AB} \\ + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right]\mathrm{B}^2 \end{aligned} \right.$$

ne peut jamais être négative en aucun point du fluide, et pour aucun système de valeurs de A, B.

De cette condition on peut déduire une série de conséquences.

L'une de ces conséquences est la forme particulière prise, dans ce cas, par la condition (75) qui devient, en vertu des égalités (76),

$$(78)\qquad [(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e)dx + (\mathrm{Y}_i + \mathrm{Y}_e)dy + (\mathrm{Z}_i + \mathrm{Z}_e)dz]\,d\rho \geqq 0.$$

Cette inégalité (78), on le voit sans peine, peut s'énoncer ainsi : *Si la direction qui va du point* M *au point voisin* M' *fait un angle aigu avec la direction de la force, tant extérieure qu'intérieure, la densité ne peut être moindre au point* M' *qu'au point* M; *elle ne peut être plus grande au point* M' *qu'au point* M, *si la direction* MM' *fait un angle obtus avec la direction de la force.* On sait d'ailleurs qu'elle est la même au point M et au point M', si la direction MM' fait un angle droit avec la direction de la force.

On peut appliquer cet énoncé même au cas où les points M, M' sont séparés par une surface de discontinuité; il renferme alors la deuxième condition et la troisième condition, nécessaires pour la stabilité.

Pour que la forme (77) ne puisse devenir négative pour aucun système de valeurs de A et de B, il faut que l'on ait les inégalités

$$(79)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right) \geqq 0,$$

$$(80)\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3} \geqq 0,$$

$$(81)\quad \Delta = \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\right]\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right] - \left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]^2 \geqq 0.$$

Ces diverses inégalités conduisent à des propositions intéressantes.

On a, en effet, en tout point de la masse fluide, en vertu des égalités (38) et (76),

$$\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = \Pi. \tag{82}$$

Cette égalité détermine la densité ρ en un point du fluide lorsqu'on connaît en ce point la pression Π et la concentration s. Supposons que la concentration s demeurant constante, la pression Π augmente de $d\Pi$; l'égalité (82), différentiée, donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) d\rho = d\Pi.$$

Jointe à la condition (79), cette égalité nous apprend que, *lorsque la pression croît en un point du fluide sans que la concentration en ce point éprouve aucun changement, la densité en ce point ne peut diminuer.*

Supposons maintenant que, Π étant maintenu constant, s varie de ds; l'égalité (82) nous donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) d\rho + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \, \partial s} ds = 0.$$

Lorsque la pression en un point d'un fluide est maintenue constante, un accroissement de la concentration en ce point produit une variation de la densité dont le signe est celui de $-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \, \partial s}$.

En tout point d'un fluide, on a les égalités

$$\zeta + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + V + U + \frac{\lambda + \mu s}{1 + s} = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1 + s)^2} = 0. \tag{36}$$

Ces égalités, différentiées, donnent

$$\left(2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right) d\rho + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \, \partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1 + s)^2}\right] ds = X dx + Y dy + Z dz,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \, \partial \rho} d\rho + \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda - \mu)}{(1 + s)^3}\right] ds = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$X = X_i + X_e, \qquad Y = Y_i + Y_e, \qquad Z = Z_i + Z_e.$$

Résolvons ces équations par rapport à $d\rho$, ds, en tenant compte de l'égalité (36); nous trouvons sans peine

$$(83) \qquad d\rho = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda - \mu)}{(1+s)^3}}{\Delta}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

$$(84) \qquad ds = -\frac{\rho' \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s\,\partial \rho}}{\Delta}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

En tenant compte de la condition (80), l'égalité (83) nous redonne cette proposition, que nous avons déjà trouvée autrement :

Le long d'un chemin élémentaire faisant un angle aigu avec la direction de la force, la densité ne peut être décroissante.

L'égalité (84), jointe à la proposition que nous avions précédemment obtenue, conduit à une nouvelle proposition :

Si, sous pression constante, un accroissement de concentration du fluide entraîne une augmentation de densité, la concentration ne peut être que croissante le long d'un chemin élémentaire faisant un angle aigu avec la direction de la force; l'inverse a lieu si, sous pression constante, un accroissement de concentration du fluide est accompagné d'une diminution de densité.

§ 7. — Fluides dont les divers éléments se repoussent ou s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle.

Considérons maintenant un fluide dont les divers éléments *se repoussent* en raison inverse du carré de leur mutuelle distance; nous aurons alors

$$(85) \qquad \Psi = \frac{\varepsilon}{r},$$

ε étant une constante positive. Cette détermination de la fonction Ψ entraîne, en vertu de théorèmes connus, la conséquence suivante : Dans l'expression de $\delta^2\Phi$, donnée par l'égalité (62), *la quantité que nous avons désignée par* Y *est essentiellement positive*. De là, on déduit sans peine cette proposition :

Les conditions que nous avons indiquées comme nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un fluide deviennent en même temps suffisantes dans le cas où les actions mutuelles de deux éléments quelconques du fluide se réduisent à une force répulsive inversement proportionnelle au carré de la distance des éléments.

Il n'en est plus de même lorsque l'action inverse au carré de la distance mutuelle qui s'exerce entre deux éléments fluides est une action *attractive*. On a, dans ce cas,

$$\Psi = -\frac{f}{r}, \tag{86}$$

f étant une constante positive. Un théorème connu nous apprend que, dans ce cas, *la quantité que nous avons désignée par* Y *est essentiellement négative.*

Ce caractère de la quantité Y ne nous fournit pas les conditions qui suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre du fluide; mais il nous permet de compléter les conditions nécessaires déjà trouvées par les additions suivantes :

1° *Il ne peut exister deux fonctions continues* $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, *dont l'une au moins diffère de zéro, telles que l'expression*

$$\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)[A(x, y, z)]^2 + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right][B(x, y, z)]^2$$
$$+ 2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]A(x, y, z)\,B(x, y, z)$$

soit égale à zéro en tous les points d'un volume fini faisant partie de la masse fluide.

2° *La quantité* N *ne peut être égale à zéro en tous les points d'une aire d'étendue finie tracée à la surface qui limite le fluide.*

3° *La quantité* $(\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)$ *ne peut être égale à zéro en tous les points d'une aire d'étendue finie tracée à la surface de séparation de deux fluides* 1 *et* 2.

Entre les deux cas que nous venons de traiter se trouve le cas où les éléments qui composent le fluide n'exercent l'un sur l'autre *aucune action;* dans ce cas, *la quantité* N *est égale à zéro* et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Lorsque les éléments qui composent le fluide sont sans action les uns sur les autres, les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre doivent être complétées comme nous venons de l'indiquer pour le cas où les éléments s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle, et elles deviennent alors conditions suffisantes.

C'est le résultat auquel nous étions parvenus directement en d'autres publications [1].

Traçons une surface fermée σ, enfermant un volume ϖ contenant tout ou partie du fluide. Soit ν la normale à la surface σ vers l'extérieur du volume ϖ; on sait que l'on a identiquement

$$(87) \qquad \mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(U+V)}{\partial\nu}\,d\sigma = \int_\varpi \Delta(U+V)\,d\varpi.$$

Appliquons d'abord cette égalité au cas d'un fluide dont les divers éléments se repoussent les uns les autres en raison inverse du carré de leur distance mutuelle et sont attirés ou repoussés en raison inverse du carré de la distance par des masses extérieures. L'égalité (85) nous donnera

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = -4\pi\varepsilon\rho.$$

L'égalité (87) deviendra

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(U+V)}{\partial\nu}\,d\sigma = -4\pi\varepsilon\int_\varpi \rho\,d\varpi.$$

---

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 91). — *Dissolutions et mélanges;* 1er Mémoire : *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. III.B).

Le second membre étant à coup sûr négatif, il en est de même du premier; il y a donc assurément des points de la surface σ où $\frac{\partial(U+V)}{\partial\nu}$ est négatif. En ces points, on a

$$(X_i + X_e)\cos(\nu, x) + (Y_i + Y_e)\cos(\nu, y) + (Z_i + Z_e)\cos(\nu, z) > 0;$$

en ces points, la force tant extérieure qu'intérieure fait un angle aigu avec la normale ν. Dès lors, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Un fluide dont les divers éléments se repoussent en raison inverse du carré de la distance est soumis à l'action de masses extérieures qui attirent ou repoussent ces mêmes éléments en raison inverse du carré de la distance; ce fluide est en équilibre stable; traçons une surface fermée renfermant ce fluide en totalité ou en partie. Il existe sur cette surface des points tels que si l'on s'éloigne d'un tel point suivant la normale à la surface et vers l'extérieur de la surface, on rencontre, après un trajet infiniment petit, un fluide au moins aussi dense que celui qui se trouvait au point que l'on a quitté.

De cette proposition se déduisent les conséquences suivantes :

Si, dans un tel fluide, on trace une surface d'égale densité σ qui soit fermée, toute surface d'égale densité σ', tracée à l'intérieur de la surface σ, correspond à une densité au plus égale à celle que l'on rencontre sur la surface σ; toute surface d'égale densité σ'', contenant à son intérieur la surface σ, correspond à une densité au moins égale à celle que l'on rencontre sur la surface σ.

Le fluide que nous étudions ne peut être en équilibre stable s'il est limité par une surface libre fermée.

Considérons, maintenant, *un fluide dont les divers éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance et sont attirés ou repoussés en raison inverse du carré de la distance par des masses*

extérieures. Nous aurons, en vertu de l'égalité (86),

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = 4\pi f\rho,$$

et l'égalité (87) deviendra

$$\int_\sigma \frac{\partial(V+U)}{\partial\nu}\,d\sigma = 4\pi f \int_w \rho\, dw.$$

Le second membre étant assurément positif, il en sera de même du premier, et nous obtiendrons des *résultats inverses de ceux que nous venons d'énoncer*.

§ 8. — Masse fluide, animée d'un mouvement de rotation uniforme et dont les divers éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance.

Imaginons une masse fluide dont les éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance mutuelle, et sont attirés suivant la même loi par des masses fixes; supposons en outre que cette masse fluide soit animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe donné. On sait combien il est difficile de déterminer la figure d'équilibre de cette masse et d'établir les conditions dans lesquelles cet équilibre est stable. Nous ne prétendons pas ici résoudre ce problème dans des cas nouveaux; nous voulons seulement apporter la démonstration de quelques propositions que l'on a toujours regardées comme certaines.

Prenons l'axe de rotation pour axe des z. Soit ω la vitesse angulaire de rotation. On sait que, pour obtenir l'équilibre relatif de la masse fluide, il suffit de chercher l'état d'équilibre absolu qu'elle prendrait sous l'action des forces qui la sollicitent réellement et de forces fictives (forces centrifuges) admettant pour fonction potentielle

$$W = -\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2). \tag{88}$$

Les considérations précédemment exposées touchant l'équilibre des fluides s'appliquent donc à ce cas.

Touchant la *stabilité* de cet équilibre relatif, nous nous bornerons à rappeler le résultat suivant, dû à MM. W. Thomson et Tait :

Soit un système soumis à des forces ayant pour potentiel Ω; *ce système est en équilibre relatif, et sa force vive est* $\mathfrak{T}$. SI L'ON SUPPOSE EN CE SYSTÈME DES RÉSISTANCES PASSIVES, *pour que l'équilibre relatif soit stable, il faut et il suffit que la quantité* $(\Omega + \mathfrak{T})$ *soit un minimum.*

Dans le cas général, où nous nous sommes placés, où le système renferme des fluides compressibles, ce n'est plus à la Mécanique, mais à la Thermodynamique qu'il faut faire appel pour traiter de l'équilibre et du mouvement de ce système. La proposition de MM. Thomson et Tait devra alors être remplacée par la suivante :

Pour que l'équilibre relatif d'un système QUI OFFRE DES RÉSISTANCES PASSIVES *soit stable, il faut et il suffit que la somme* $(\Phi + \mathfrak{T})$ *de son potentiel thermodynamique et de sa force vive soit minimum.*

On démontrera sans peine que cette condition est suffisante en s'appuyant sur les principes que nous avons posés ailleurs ([1]) et en imitant les raisonnements donnés par Lejeune-Dirichlet dans le cas de l'équilibre absolu. Quant à la nécessité de la condition, *pour un système qui ne dépend que d'un nombre limité de paramètres variables*, elle se déduira de l'étude des petits mouvements du système, selon la méthode appliquée par Lagrange à l'équilibre absolu et par MM. Thomson et Tait à l'équilibre relatif. La démonstration ne pourra s'étendre au cas de systèmes dépendant d'un nombre illimité de paramètres variables sans postulat spécial; on pourra répéter à cet égard ce que nous avons dit au sujet de l'équilibre absolu, au début de notre Mémoire *sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant.*

Admettons dorénavant que le minimum de $(\Phi + \mathfrak{T})$ soit la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre relatif d'un

([1]) *Commentaires aux principes de la Thermodynamique*, 3e partie, Chapitre IV, § 2 (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. X, p. 263).

système qui offre des résistances passives, ou, selon la dénomination adoptée par M. Poincaré [1], pour la *stabilité séculaire* du système.

M. Poincaré, en étudiant la stabilité relative des figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation, n'a pas cherché d'une manière absolument générale les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme $(\Omega + \mathfrak{T})$ soit minimum; au § 9 de son Mémoire, il traite seulement le cas où le mouvement troublé du système est encore un mouvement uniforme de rotation, de *même vitesse angulaire* ω, *autour du même axe* OZ; au § 10, le cas où le mouvement troublé correspond à un *même moment de quantité de mouvement par rapport à l'axe* OZ que le mouvement initial, ce qui suppose que les forces perturbatrices avaient un moment nul par rapport à l'axe OZ. C'est dans le premier de ces deux cas que nous nous supposerons placé; cette restriction est sans inconvénient pour l'objet que nous nous proposons; les conditions qui, dans ce cas restreint, sont nécessaires pour le minimum de $(\Phi + \mathfrak{T})$, demeurent nécessaires dans le cas général.

Dès lors, *les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre absolu d'une masse fluide dont les éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance* (conditions énoncées au § 7) *demeurent nécessaires pour la stabilité séculaire de la même masse animée d'un mouvement de rotation uniforme, pourvu que l'on ajoute aux quantités* $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ *les composantes* X_c, Y_c, Z_c *de la force centrifuge.*

D'après l'égalité (88), on a

$$X_c = \omega^2 x, \qquad Y_c = \omega^2 y, \qquad Z_c = 0. \tag{89}$$

L'identité (87), appliquée au cas actuel, devient

$$\mathrm{S}\, \frac{\partial(U + V + W)}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_{w} \Delta(U + V + W)\, dw. \tag{90}$$

[1] H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, p. 259; 1885).

En vertu des égalités (86) et (88), on a

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = 4\pi f \rho, \qquad \Delta W = -2\omega^2.$$

Soient $\mu = \int \rho \, d\varpi$ la masse contenue dans la surface σ et $\varpi = \int_w d\varpi$ le volume qu'enferme cette surface. L'égalité (90) deviendra

$$(91) \qquad \mathbf{S}_\sigma \frac{\partial(U + V + W)}{\partial\nu} d\sigma = 2(2\pi f \mu - \varpi\omega^2).$$

En raisonnant sur cette égalité comme nous l'avons fait au § 7 sur des égalités analogues, nous arrivons aux conséquences suivantes :

Traçons une surface fermée σ englobant un volume ϖ et contenant une masse μ du fluide.

Si l'on a $\omega^2 < \frac{2\pi f \mu}{\varpi}$, il est des points M *sur la surface σ tels que si l'on s'éloigne de l'un de ces points en pénétrant à l'intérieur du volume ϖ, on ne rencontre pas de masse fluide moins dense que celle qui se trouvait au point* M.

Si l'on a $\omega^2 > \frac{2\pi f \mu}{\varpi}$, il est des points M *sur la surface σ tels que si l'on s'éloigne de l'un de ces points en pénétrant à l'intérieur du volume ϖ, on ne rencontre pas de masse fluide plus dense que celle qui se trouvait au point* M.

Appliquons cette proposition à une surface entourant la surface limite du fluide et infiniment voisine de celle-ci ; nous en conclurons qu'*une masse fluide terminée par une surface libre ne peut posséder la stabilité séculaire si l'on a*

$$\omega^2 > \frac{2\pi f \mathfrak{M}}{\mathfrak{W}},$$

$\mathfrak{M}$ étant la masse totale du fluide et $\mathfrak{W}$ son volume.

M. Poincaré avait montré (¹) que, dans ce cas, la résultante des

(¹) H. Poincaré, *Bulletin astronomique*, t. II, p. 117. — Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 108.

forces intérieure, extérieure et centrifuge est, en certains points de la surface limite du fluide, dirigée vers l'extérieur; il en avait conclu que la masse ne pouvait être en équilibre stable; notre analyse démontre un intermédiaire que M. Poincaré regardait comme évident.

Supposons la vitesse angulaire de rotation ω assez faible pour que l'on ait assurément, en tout point de la masse fluide,

$$(92) \qquad \omega^2 < 2\pi f \rho.$$

On aura alors, quelle que soit la surface σ,

$$\omega^2 < \frac{2\pi f \mu}{\varpi}$$

et l'on pourra énoncer les théorèmes suivants :

Si l'on trace, dans une région continue de la masse fluide, une surface fermée en tous les points de laquelle la densité du fluide ait la même valeur, en tous les points intérieurs à cette surface la densité a une valeur au moins égale à celle qu'elle prend sur la surface.

Si une surface fermée sépare deux fluides continus différents, le fluide le plus dense est intérieur à la surface.

Ces propositions ont toujours été regardées comme certaines par les auteurs qui, depuis Clairaut, ont traité de la figure des planètes, bien qu'elles n'aient, à notre connaissance, reçu aucune démonstration.

Le résultant de trois formes ternaires quadratiques;

PAR M. PAUL GORDAN.

Soient données trois formes ternaires

$$f, \quad f_1, \quad f_2$$

et m, n, p leurs degrés dans les variables x; le résultant R est une fonction entière des coefficients, qui a les degrés np, mp, mn.

Soient

$$u_{\alpha_1}, \quad u_{\alpha_2}, \quad u_{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad u_{\alpha_{np}}$$

les points d'intersection de f_1 et f_2; on sait que le résultant R a la valeur

$$R = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_{np}).$$

Dans cette expression de R, les coefficients de f entrent rationnellement; les coefficients de f_1 et f_2 y figurent implicitement dans les α; il s'agit de la transformer de manière que les coefficients de f_1 et de f_2 paraissent aussi rationnellement.

Pour résoudre cette question, je me sers du théorème de réciprocité de M. Hermite.

Je commence en établissant le système de f et en formant les produits symboliques

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_\rho,$$

qui sont les covariants et invariants, etc., asyzygétiques de f, qui ont dans les coefficients le degré np.

Dans ces produits, je remplace les symboles a, b, c, ... de f par les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{np}$ et les variables x, u par les variables u, x. Dans les produits, qui résultent, je permute les indices $1, 2, \ldots, np$ et fais l'addition. De cette manière, on obtient des covariants, invariants, etc., Q simultanés et symétriques des formes linéaires α.

Les formes P, qui ont les degrés λ et μ dans les variables x et u, vont être combinées avec les formes Q, qui ont les degrés μ et λ, de manière que l'on obtienne des invariants U,

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_\sigma.$$

Le résultant R peut alors être représenté par un agrégat,

$$R = c_1 U_1 + c_2 U_2 + \ldots + c_\sigma U_\sigma,$$

où les c sont des coefficients numériques.

Les produits Q sont des covariants, invariants, etc., simultanés (combinants et semicombinants) des formes f_1 et f_2; un grand nombre peuvent être remplacés par les covariants, invariants, etc., de la forme

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_{np}}.$$

Dans le cas

$$n = p = 2 \qquad \text{et} \qquad m > 3;$$

ce fait a lieu pour tous les Q et dans le cas

$$n = p = 2 \qquad \text{et} \qquad m = 2 \text{ ou } 3,$$

il a lieu pour tous les Q, excepté une forme.

Pour calculer les coefficients numériques c, on peut remplacer les formes f, f_1, f_2 par des formes spéciales. Il est avantageux de remplacer la forme f par le produit de m formes linéaires.

Pour donner un exemple de nos procédés, je veux calculer de cette manière le résultant de trois formes ternaires quadratiques.

I. — Les combinaisons (P, Q).

Le résultant R des formes

$$f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = d_x^2, \qquad f_1 = r_x^2 = r_{1,x}^2, \qquad f_2 = s_x^2 = s_{1,x}^2$$

est un invariant simultané de ces formes, qui a le degré 4 dans leurs coefficients.

Les trois formes ont les systèmes

$$\begin{array}{lll} f, & (abu)^2 = A, & a_A^2 = D, \\ f_1, & (rr_1u)^2 = R, & r_R^2 = D, \\ f_2, & (ss_1u)^2 = S, & s_S^2 = D_3 : \end{array}$$

il faut les combiner.

Soient

$$u_{\alpha_1}, \quad u_{\alpha_2}, \quad u_{\alpha_3}, \quad u_{\alpha_4}$$

les points d'intersection de f_1 et f_2.

R a la valeur

$$R = a_{\alpha_1}^2 b_{\alpha_2}^2 c_{\alpha_3}^2 d_{\alpha_4}^2; \tag{1}$$

il faut le transformer pour que les coefficients de f, f_1, f_2 y entrent rationnellement.

Les produits symboliques asyzygétiques, qui sont invariants, etc. de f et qui ont le degré 4 dans ses coefficients, sont

$$P_1 = a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2, \qquad P_2 = (abu)^2 c_x^2 d_x^2.$$
$$P_3 = (abu)^2 (cdu)^2, \qquad P_4 = (abc)^2 d_x^2.$$

On en déduit les formes simultanées symétriques des quatre formes

linéaires α :

$$Q_1 = u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_3}^2 u_{\alpha_4}^2,$$

$$Q_2 = (\alpha_1 \alpha_2 x)^2 u_{\alpha_3}^2 u_{\alpha_4}^2 + (\alpha_1 \alpha_3 x)^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_4}^2 + (\alpha_1 \alpha_4 x)^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_3}^2$$
$$+ (\alpha_2 \alpha_3 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_4}^2 + (\alpha_2 \alpha_4 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_3}^2 + (\alpha_3 \alpha_4 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_2}^2,$$

$$Q_3 = (\alpha_1 \alpha_2 x)^2 (\alpha_3 \alpha_4 x)^2 + (\alpha_1 \alpha_3 x)^2 (\alpha_2 \alpha_4 x)^2 + (\alpha_1 \alpha_4 x)^2 (\alpha_2 \alpha_3 x)^2,$$

$$Q_4 = (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^2 u_{\alpha_1}^2 + (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4)^2 u_{\alpha_2}^2 + (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4)^2 u_{\alpha_3}^2 + (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2 u_{\alpha_4}^2.$$

Comme le résultant est un invariant simultané de f et des formes linéaires α, il est un agrégat des combinaisons des P et Q,

$$(2) \quad R = c_1(P_1, Q_1)_{0,8} + c_2(P_2, Q_2)_{0,4}^{2,0} + c_3(P_3, Q_3)^{4,0} + c_4(P_4, Q_4)_{0,2},$$

les c y sont des coefficients numériques.

Il y a deux opérations à exécuter :

1° Il faut transformer les Q, pour qu'ils contiennent les coefficients de f_1 et f_2 rationnellement ;

2° Il faut calculer les coefficients numériques c.

II. — Transformation des Q.

Les Q sont invariants, covariants, etc. (combinants) de f_1 et f_2 ; ils peuvent être exprimés en fonctions entières des formes du système simultané.

Ce système a entre autres formes celles-ci :

$$(rsu)^2 = T, \qquad s_R^2 = D_1, \qquad r_S^2 = D_2,$$
$$v = RS - T^2, \qquad g = (TTx)^2,$$
$$\mu = \begin{vmatrix} R & D & D_1 \\ T & D_1 & D_2 \\ S & D_2 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Les formes v et μ ont, à un facteur constant près, qui peut être sup-

primé, les valeurs

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} u_{\alpha_3} u_{\alpha_4}, \qquad \mu = Q_4.$$

La dernière formule peut être démontrée par le fait que Q_4 est du degré 2 dans les variables u et par les formules

$$(r, Q_4)_{0,2} = 0, \qquad (s, Q_4)_{0,2} = 0.$$

La forme Q_1 a la valeur

$$Q_1 = v^2.$$

v est un covariant simultané des formes linéaires α; les covariants et invariants de v le sont aussi. $(vv_1 x)^2 u_v^2 u_{v_1}^2$ est un agrégat de Q_2 et $Q_4 u_x^2$, et $(vv_1 x)^4$ est, à un facteur constant près, Q_3.

Il est donc permis de remplacer dans la formule (2) les formes Q par

$$v^2, \quad (vv_1 x)^2 u_v^2 u_{v_1}^2, \quad (vv_1 x)^4, \quad \mu.$$

De cette manière, nous arrivons à un agrégat de combinaisons : en remplaçant chacune d'elles par un produit symbolique équivalent, la valeur de R devient

$$(3) \quad R = c_1 (a_v^2 b_v^2)^2 + c^2 \left(abvv_1\right)^2 a_v^2 b_{v_1}^2 + c_3 \left(abvv_1\right)^2 \left(cdvv_1\right)^2 + c_4 \Delta a_\mu^2.$$

Voilà une formule dans laquelle les coefficients de toutes les trois formes entrent rationnellement.

Il reste à calculer les coefficients numériques c, en introduisant pour f, f_1, f_2 des formes spéciales.

Pour trouver c_1, c_2, c_3, nous choisissons pour f le produit de deux facteurs linéaires, et pour trouver c_4 nous prenons pour f la forme $r_x^2 + \lambda g_x^2$ et pour f_1 et f_2 des formes dont les invariants satisfont aux relations

$$D = D_3 = 1, \qquad D_1 = D_2 = 0.$$

III. — Calcul de c_1, c_2, c_3.

En posant $f = p_x q_x$, on a $A = -\frac{1}{2}(pqu)^2$, $\Delta = 0$,

$$p_\nu^4 q_\nu^4 = c_1 (p_\nu^2 q_\nu^2)^2 - \tfrac{1}{2} c_2 \left(pq\widehat{\nu\nu_1}\right)^2 p_\nu q_\nu p_{\nu_1} q_{\nu_1} + \tfrac{1}{4} c_3 \left(pq\widehat{\nu\nu_1}\right)^4,$$

et en comparant les coefficients des termes $p_\nu^4 q_\nu^4, (p_\nu^3 p_{\nu_1} q_{\nu_1}^3 q_\nu), (p_\nu^2 q_\nu^2)^2$:

$$\tfrac{1}{2} c_3 = 1, \qquad c_2 + 2c_3 = 0, \qquad c_1 + c_2 + \tfrac{3}{2} c_3 = 0,$$

$$c_3 = 2, \qquad c_2 = -4, \qquad c_1 = 1.$$

La formule (3) devient

$$(4) \quad R = (a_\nu^2 b_\nu^2)^2 - 4\left(ab\widehat{\nu\nu_1}\right)^2 c_\nu^2 d_{\nu_1}^2 + 2\left(ab\widehat{\nu\nu_1}\right)^2 \left(cd\widehat{\nu\nu_1}\right)^2 + c_4 \Delta a_\mu^2.$$

IV. — Calcul de c_4.

$$f = r_x^2 + \lambda g_x^2, \qquad D = D_3 = 1, \qquad D_1 = D_2 = 0.$$

En comparant le coefficient de λ, on a

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = r_\nu^2 g_\nu^2 . r_\nu^2 r_{1,\nu}^2 - 2\left(\nu\nu_1 \widehat{rg}\right)^2 r_{1,\nu}^2 r_{2,\nu_1}^2 - 2(\nu\nu_1 R)^2 r_\nu^2 g_{\nu_1}^2 \\ \qquad + 2(\nu\nu_1 R)^2 \left(\nu\nu_1 \widehat{rg}\right)^2 + \tfrac{1}{4} c_4 g_\mu^2; \end{cases}$$

nous voulons calculer les valeurs de ces produits symboliques. Partant des formules générales

$$3(RR_1x)^2 = 4Dr, \qquad 3(RTx)^2 = 3D_1 r + Ds,$$

$$3(SS_1x)^2 = 4D_3 s, \qquad 3(STx)^2 = D_3 r + 3D_2 s,$$

$$D_2 r + D_1 s = \tfrac{1}{2}(RSx)^2 + (TT_1x)^2, \qquad (TT_1x)^2 = g,$$

$$v = RS - T^2, \qquad \mu = \begin{vmatrix} R & D & D_1 \\ T & D_1 & D_2 \\ S & D_2 & D_3 \end{vmatrix},$$

on trouve dans notre cas

$$r_S^2 = r_T^2 = s_R^2 = s_T^2 = 0, \qquad \mu = -T,$$

$$(RR_1x)^2 = \tfrac{1}{3}r, \qquad (RTx)^2 = \tfrac{1}{3}s, \qquad (STx)^2 = \tfrac{1}{3}r,$$

$$(SS_1x)^2 = \tfrac{1}{3}s, \qquad (RSx)^2 = -2g,$$

$$(gru)^2 = -\tfrac{1}{6}S, \qquad g_R^2 = 0, \qquad g_S^2 = 0, \qquad g_T^2 = -\tfrac{1}{6}, \qquad g_\mu^2 = \tfrac{1}{6},$$

$$(TT_1T_2)^2 = -\tfrac{1}{6}, \qquad (gg_1u)^2 = -\tfrac{2}{9}T,$$

$$u_v^2 v_v^2 = \tfrac{1}{2}Rv_S^2 + \tfrac{1}{2}Sv_R^2 - Tv_T^2 + (guv)^2, \qquad r_v^2 u_v^2 = \tfrac{1}{3}S, \qquad s_v^2 u_v^2 = \tfrac{1}{3}R,$$

$$g_v^2 u_v^2 = -\tfrac{1}{18}T, \qquad r_v^2 s_v^2 = \tfrac{1}{3}, \qquad r_v^2 g_v^2 = 0, \qquad r_v^2 r_{1,v_1}^2 (vv_1x)^2 = \tfrac{4}{27}s.$$

$$r_v^2 g_{v_1}^2 (vv_1x)^2 = -\tfrac{1}{162}r. \qquad (vRx)^2 (vSx)^2 = -\tfrac{7}{92}rs,$$

$$r_v^2 r_{1,v_1}^2 \left(vv_1 rg\right)^2 = -\tfrac{2}{81}, \qquad r_v^2 g_{v_1}^2 (vv_1R)^2 = -\tfrac{1}{162},$$

$$(vv_1R)^2 \left(vv_1 rg\right)^2 = -\tfrac{7}{162}.$$

En introduisant ces valeurs dans la formule (5), on trouve

$$0 = \tfrac{4}{81} + \tfrac{1}{81} - \tfrac{7}{81} + \tfrac{1}{24}c_4, \qquad c_4 = \tfrac{16}{27},$$

et la formule (4) devient

$$\text{(6)} \quad R = (a_v^2 b_v^2)^2 - 4\left(vv_1 ab\right)^2 a_v^2 b_{v_1}^2 + 2\left(vv_1 \widehat{ab}\right)^2 \left(vv_1 cd\right)^2 + \tfrac{16}{27}\Delta a_\mu^2.$$

Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice;

PAR M. H. POINCARÉ.

Introduction.

Soient u et u' les anomalies excentriques de deux astres et D leur distance. Le carré D^2 est un polynome entier par rapport aux lignes trigonométriques de u et de u'.

La partie principale de la fonction perturbatrice est précisément $\frac{1}{D}$. Elle peut se développer soit suivant les cosinus et sinus des anomalies moyennes, soit suivant ceux des anomalies excentriques.

Le premier développement est le plus employé et le plus utile; néanmoins il peut y avoir quelque intérêt à étudier les propriétés du second pour plusieurs raisons :

1° Quand les deux excentricités sont nulles, les deux développements se confondent, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison.

2° Hansen s'est servi de développements procédant suivant l'anomalie moyenne d'une des planètes et l'anomalie excentrique de l'autre.

3° Enfin la connaissance des propriétés du second développement, qui sont plus simples, peut nous guider dans l'étude du premier développement.

Quoi qu'il en soit, le carré D^2 est un polynome du second degré par rapport à $\cos u$, $\sin u$, $\cos u'$, $\sin u'$.

Si nous posons

$$e^{iu} = x, \qquad e^{iu'} = y,$$

D^2 sera un polynome du deuxième degré en x, $\frac{1}{x}$, y, $\frac{1}{y}$ et $x^2 y^2 D^2$ sera un polynome entier en x, y, soit

$$x^2 y^2 D^2 = F(x, y),$$

d'où

$$\frac{1}{D} = \frac{xy}{\sqrt{F}}.$$

Nous sommes donc conduits à développer $\frac{1}{\sqrt{F}}$ suivant les puissances positives et négatives de x et de y.

Je traiterai la question pour un polynome F quelconque. Pour que le développement soit possible et valable pour

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1,$$

il faut d'abord que F ne s'annule pour aucun des systèmes de valeurs de x et de y dont le module est égal à 1.

Sans cela, l'expression $\frac{1}{\sqrt{F}}$ devenant infinie ne pourrait plus être développée par la formule de Fourier.

Il faut ensuite que le radical $\sqrt{F}$ revienne à sa valeur primitive quand l'argument de x augmente de 2π, de telle façon que la variable x décrive la circonférence tout entière du cercle

$$|x| = 1.$$

Regardons y comme une constante; le polynome F, considéré alors comme fonction de x seulement, a un certain nombre de zéros. Il faut que le nombre de ces zéros, qui sont à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, soit pair. Cela doit avoir lieu pour toutes les valeurs de y dont le module est égal à 1.

Mais il suffit que cela ait lieu pour $y = 1$; en effet, faisons décrire au point y le cercle $|y| = 1$ tout entier; le nombre des racines de

l'équation $F = 0$, qui sont à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, demeurera constant. En effet, il ne pourrait changer que si une des racines venait sur la circonférence $|x| = 1$. Or, cela n'est pas possible, car nous avons supposé plus haut que F ne pouvait s'annuler pour $|x| = 1$, $|y| = 1$.

Nous supposerons donc que, pour $y = 1$, l'équation $F = 0$ a un nombre pair de racines à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Il faut enfin que le radical $\sqrt{F}$ revienne à sa valeur primitive quand l'argument de y augmente de 2π.

Nous supposerons donc encore que, pour $x = 1$, l'équation $F = 0$ (où y est regardée comme l'inconnue) a un nombre pair de racines à l'intérieur du cercle $|y| = 1$.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Relations de récurrence entre les coefficients.

Nous aurons donc le développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{F}} = \sum A_{ab} x^a y^b,$$

et le coefficient A_{ab} sera donné par la formule

$$A_{ab} = \frac{-1}{4\pi^2} \int\int \frac{dx\,dy\,x^{-a-1}y^{-b-1}}{\sqrt{F(x,y)}}.$$

L'intégrale double doit être prise le long des deux cercles

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1.$$

Les coefficients A_{ab} sont en général des fonctions transcendantes des coefficients de F, mais nous allons voir qu'il y a entre les A_{ab} des relations de récurrence de telle façon qu'il ne reste qu'un nombre fini de transcendantes distinctes.

Pour simplifier, je me bornerai d'abord au cas où $a + 1$ et $b + 1$

sont négatifs, de telle façon que le numérateur de la quantité sous le signe $\int\int$

$$x^{-a-1}y^{-b-1}$$

soit un polynome entier. Nous verrons plus loin que les autres cas se ramènent aisément à celui-là. S'il y a entre les A_{ab} $(a+1<0,$ $b+1<0)$ une relation linéaire, cette relation s'écrira

$$(1) \qquad \int\int \frac{H\,dx\,dy}{\sqrt{F}} = 0,$$

H étant un polynome entier. Nous avons donc à rechercher quelles sont les relations de la forme (1).

On peut en trouver de la manière suivante : soit P un polynome quelconque ; on aura évidemment

$$(2) \qquad \int\int \frac{d}{dx}(P\sqrt{F})\,dx\,dy = 0,$$

car, en intégrant d'abord par rapport à x, on trouve zéro, puisque $P\sqrt{F}$ reprend la même valeur quand, x ayant décrit toute la circonférence $|x| = 1$, son argument augmente de 2π.

D'ailleurs toutes les périodes de l'intégrale double (2) seront nulles.

Or

$$\frac{d}{dx}(P\sqrt{F}) = \frac{1}{\sqrt{F}}\left(\frac{dP}{dx}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P\right)$$

La relation (1) sera donc satisfaite quand on aura

$$H = \frac{dP}{dx}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P.$$

De même si Q est un polynome quelconque, on aura

$$\int\int \frac{d}{dy}(Q\sqrt{F})\,dx\,dy,$$

de sorte que la relation (1) sera encore satisfaite quand on aura

$$H = \frac{dQ}{dy} F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dy} Q.$$

Si P et Q sont deux polynomes quelconques, on aura encore

$$\int\int \left[\frac{dP}{dx} \frac{d}{dy} (Q\sqrt{F}) - \frac{dP}{dy} \frac{d}{dx} (Q\sqrt{F}) \right] dx\,dy = 0;$$

mais ce cas se ramène au précédent, car on a évidemment

$$\frac{dP}{dx} \frac{d}{dy} (Q\sqrt{F}) - \frac{dP}{dy} \frac{d}{dx} (Q\sqrt{F}) = \frac{d}{dy} \left(Q \frac{dP}{dx} \sqrt{F} \right) - \frac{d}{dx} \left(Q \frac{dP}{dy} \sqrt{F} \right).$$

Premier cas.

Le polynome F est homogène et de degré m en x et en y; l'équation

$$F = 0$$

n'a pas de racine double.

Nous supposerons également que le polynome H est homogène et de degré q.

Je dis alors que si le degré q est suffisamment élevé, on pourra trouver deux polynomes P et Q tels que

$$H = \frac{dP}{dx} F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dx} P + \frac{dQ}{dy} F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dy} Q, \tag{3}$$

et par conséquent que l'on aura toujours

$$\int\int \frac{H\,dx\,dy}{\sqrt{F}} = 0.$$

Il est clair que, si les polynomes P et Q sont homogènes de degré p, on aura

$$q = m + p - 1,$$

ce qui exige déjà

$$q \geq m - 1.$$

Maintenant, pour déterminer les polynomes P et Q, je vais opérer de la façon suivante : Je déterminerai d'abord deux polynomes A et B, homogènes et de degré p, par la relation

$$H = A\frac{dF}{dx} + B\frac{dF}{dy}. \tag{4}$$

Le polynome H contient $q+1$ coefficients; en identifiant les deux membres de l'équation (4), nous trouverons donc $q+1$ équations linéaires auxquelles les coefficients de A et de B devront satisfaire.

Le polynome A contient $p+1$ coefficients de même que B; nous avons donc $2p+2$ inconnues.

Si donc

$$q < 2p+1, \qquad \text{d'où} \qquad q > 2m-3,$$

nous aurons plus d'inconnues que d'équations.

Si

$$q = 2p+1, \qquad \text{d'où} \qquad q = 2m-3,$$

nous aurons autant d'équations que d'inconnues.

Si enfin

$$q > 2p+1, \qquad \text{d'où} \qquad q < 2m-3,$$

nous aurons plus d'équations que d'inconnues.

Je dis que si $q \geqq 2m-3$, on pourra satisfaire à la relation (4). En effet, nous avons supposé que l'équation $F=0$ n'avait pas de racine double; il en résulte que $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ ne peuvent s'annuler à la fois (sauf bien entendu pour $x=y=0$).

Supposons d'abord

$$q = 2m-3, \qquad \text{d'où} \qquad q = 2p+1, \qquad p = m-2.$$

Nous avons alors autant d'équations que d'inconnues; nous pourrons donc y satisfaire, pourvu que le déterminant de ces équations linéaires ne soit pas nul.

Mais si ce déterminant était nul, on pourrait trouver deux poly-

nomes C et D, homogènes de degré p, tels que

$$C\frac{dF}{dx} + D\frac{dF}{dy} = 0.$$

$\frac{dF}{dx}$, divisant le produit $D\frac{dF}{dy}$ et étant premier avec $\frac{dF}{dy}$, divisera D.

Mais cela est absurde, puisque D est de degré $p = m - 2$ et $\frac{dF}{dx}$ de degré $m - 1$.

Donc le déterminant n'est pas nul.

Donc on pourra satisfaire à nos équations et par conséquent à la relation (4).

Soit maintenant $q > 2m - 3$; alors H pourra se mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$H = C_1 H_1 + C_2 H_2,$$

H_1 et H_2 étant deux polynomes homogènes de degré $2m - 3$, C_1 et C_2 deux polynomes homogènes de degré $q - 2m + 3$.

Alors H_1 et H_2 pourront se mettre sous la forme (4), de sorte que

$$H_1 = A_1\frac{dF}{dx} + B_1\frac{dF}{dy},$$

$$H_2 = A_2\frac{dF}{dx} + B_2\frac{dF}{dy}.$$

Il vient alors

$$H = (C_1 A_1 + C_2 A_2)\frac{dF}{dx} + (C_1 B_1 + C_2 B_2)\frac{dF}{dy},$$

de sorte que H est mis aussi sous la forme (4).

Si enfin $q < 2m - 3$, tous les polynomes H ne peuvent pas être mis sous la forme (4), puisque le nombre des équations est plus grand que celui des inconnues.

Il y a $q + 1$ polynomes H de degré q linéairement indépendants. Sur ces $q + 1$ polynomes, il y en aura au plus $2p + 2 = 2m + 4 - q$ que l'on pourra mettre sous la forme (4).

Je dis qu'il y en aura précisément $2p + 2$: le contraire ne pourrait

arriver en effet que si un de ces polynomes pouvait être mis sous la forme (4) de deux manières différentes. Cela entraînerait une égalité de la forme

$$\mathrm{C}\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\mathrm{D}\frac{d\mathrm{F}}{dy}=0.$$

Or, nous avons vu qu'une pareille égalité est impossible, si le degré p de C et de D est inférieur à $m-1$.

Donc, si $q<2m-3$, il y aura $2m-4-q$ polynomes H de degré q, linéairement indépendants, que l'on pourra mettre sous la forme (4).

Combien y a-t-il alors, parmi les polynomes de tous les degrés, de polynomes H non susceptibles d'être mis sous la forme (4), linéairement indépendants entre eux et indépendants également de ceux qui sont susceptibles d'être mis sous la forme (4)?

D'abord tous les polynomes de degré $2m-3$ ou de degré supérieur pouvant se mettre sous la forme (4), il nous reste

$$(2m-3)(m-1)$$

polynomes de degré inférieur à $2m-3$.

Parmi ceux-là, il y en a

$$2\Sigma(p+1)$$

qui peuvent être mis sous la forme (4). Sous le signe Σ le nombre p varie de 0 à $m-3$.

Donc

$$2\Sigma(p+1)=(m-2)(m-1).$$

Il reste donc $(m-1)^2$ polynomes qui ne peuvent pas être mis sous la forme (4).

Passage de la forme (4) à la forme (3).

Supposons donc que H ait été mis sous la forme (4), il s'agit de le mettre sous la forme (3).

Pour cela, remarquons que l'on a

$$m\mathrm{F}=x\frac{d\mathrm{F}}{dx}+y\frac{d\mathrm{F}}{dy}.$$

L'équation (3) devient donc

$$H = \frac{dF}{dx}\left[\frac{1}{2}P + \frac{x}{m}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right)\right] + \frac{dF}{dy}\left[\frac{1}{2}Q + \frac{y}{m}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right)\right].$$

Si donc nous posons

$$Z = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy},$$

on devra avoir

$$(5)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{P}{2} + \dfrac{xZ}{m}, \\ B = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{yZ}{m}. \end{cases}$$

A et B sont connus, il faut déterminer Z, P et Q.

Différentions la première des équations (5) par rapport à x, la seconde par rapport à y et ajoutons, il viendra

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} = \frac{Z}{2} + \frac{2Z}{m} + \frac{1}{m}\left(x\frac{dZ}{dx} + y\frac{dZ}{dy}\right).$$

Mais, en vertu du théorème des fonctions homogènes, on a

$$x\frac{dZ}{dx} + y\frac{dZ}{dy} = (p-1)Z.$$

On a donc

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} = Z\left(\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m}\right),$$

ce qui donne Z; Z étant connu, les équations (5) donneront immédiatement P et Q.

Si donc un polynome H peut être mis sous la forme (4), il peut également être mis sous la forme (3), de sorte que l'on a

$$\int\int \frac{H\,dx\,dy}{\sqrt{F}} = 0.$$

Une question subsidiaire se pose : un polynome homogène H peut-il être mis de plusieurs manières sous la forme (3)? En d'autres

termes, peut-on trouver deux polynomes homogènes P et Q, tels que

$$\frac{d}{dx}(P\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(Q\sqrt{F}) = 0. \tag{6}$$

L'équation (6) admet une solution évidente. Soit S un polynome homogène de degré

$$p + 1 - m = q + 2 - 2m.$$

Il est clair que l'équation (6) sera satisfaite si l'on fait

$$P\sqrt{F} = \frac{d}{dy}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right); \qquad Q\sqrt{F} = -\frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right),$$

c'est-à-dire

$$P = \quad F\frac{dS}{dy} + \frac{3}{2}S\frac{dF}{dy},$$

$$Q = -F\frac{dS}{dx} + \frac{3}{2}S\frac{dF}{dx}.$$

Cette solution n'existe que si

$$p \geqq m - 1, \qquad \text{d'où} \qquad q \geqq 2m - 2.$$

Je dis qu'il n'y en a pas d'autre.

Si, en effet, P et Q satisfont à l'équation (6), c'est que

$$Q\sqrt{F}\,dx - P\sqrt{F}\,dy = dT$$

est une différentielle exacte.

Posons donc

$$Q\sqrt{F} = \frac{dT}{dx}, \qquad P\sqrt{F} = -\frac{dT}{dy};$$

T ayant pour dérivées des fonctions homogènes, devra être elle-même une fonction homogène (à une constante près, que je puis supposer nulle).

La fonction homogène T sera d'ailleurs de degré $p + \frac{m}{2} + 1$; d'où

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)\mathrm{T} = x\frac{d\mathrm{T}}{dx} + y\frac{d\mathrm{T}}{dy} = \sqrt{\mathrm{F}}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y).$$

Ainsi T est égal à $\sqrt{\mathrm{F}}$ multiplié par un polynome entier $\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y$. Pour montrer que

$$\mathrm{T} = \mathrm{S}\mathrm{F}^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y = \mathrm{S}\mathrm{F},$$

il suffit de faire voir que $\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y$ est divisible par F. En effet, on a

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)\frac{d\mathrm{T}}{dx} = \frac{d\sqrt{\mathrm{F}}}{dx}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y) + \sqrt{\mathrm{F}}\frac{d}{dx}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y),$$

ou

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{F}}}\frac{d\mathrm{F}}{dx}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y) + \sqrt{\mathrm{F}}\frac{d}{dx}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y),$$

ou

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)\mathrm{Q}\mathrm{F} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dx}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y) + \mathrm{F}\frac{d}{dx}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y),$$

ce qui montre que F divise le produit $\frac{d\mathrm{F}}{dx}(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y)$. Comme l'équation $\mathrm{F} = 0$ n'a pas de racine double, F est premier avec $\frac{d\mathrm{F}}{dx}$. Donc F divise $\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y$. C. Q. F. D.

Exposants négatifs.

Nous avons vu que le coefficient de $x^a y^b$ était donné par l'intégrale double

$$\frac{-1}{4\pi^2}\int\int\frac{dx\,dy\,x^{-a-1}y^{-b-1}}{\sqrt{\mathrm{F}(x, y)}}.$$

Jusqu'ici nous avons supposé que $a + 1$ et $b + 1$ étaient négatifs, de

telle façon qu'au numérateur de la fonction sous le signe $\int\int$, les exposants de x et de y soient positifs.

Ne nous imposons plus cette restriction.

Il est clair d'abord que le cas où un de ces exposants est négatif, et celui où ils le sont tous les deux, se ramène aisément à celui où ils sont tous deux positifs. Supposons par exemple que

$$a+1>0, \qquad b+1<0;$$

nous poserons

$$x=\frac{1}{x'},$$

d'où

$$F(x,y)=\frac{F_1(x',y)}{x'^m},$$

$F_1(x',y)$ étant un polynome entier en x' et y; l'intégrale devient alors

$$\frac{-1}{4\pi^2}\int\int\frac{dx'\,dy}{\sqrt{F_1}}\,x'^{\frac{m}{2}+a+1}y^{-b-1},$$

et l'on voit que les exposants de x' et de y sont positifs, au moins si

$$m\geqq 4.$$

On doit donc s'attendre à retrouver une théorie analogue à celle qui précède.

Mais il vaut mieux la refaire directement.

Il s'agit de trouver les relations de la forme

$$(1\ bis) \qquad \int\int\frac{H\,dx\,dy}{\sqrt{F}}=0,$$

où H n'est plus un polynome entier en x et y, mais un polynome entier en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, ou, si l'on préfère, un polynome entier en x et y, divisé par une puissance de x et par une puissance de y. Nous aurons

encore

$$(2\ bis)\qquad \int\int \frac{d\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{F}}}{dx}\,dx\,dy = \int\int \frac{d\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{F}}}{dy}\,dx\,dy = 0,$$

si P et Q sont des polynomes entiers en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$.

Il s'agit donc de voir si l'on peut mettre H sous la forme

$$(3\ bis)\qquad \mathrm{H} = \frac{d\mathrm{P}}{dx}\mathrm{F} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{P} + \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\mathrm{F} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dy}\mathrm{Q},$$

ou encore sous la forme

$$(4\ bis)\qquad \mathrm{H} = \mathrm{A}\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \mathrm{B}\frac{d\mathrm{F}}{dy},$$

A et B étant, comme H, P et Q des polynomes entiers en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Nous continuerons à supposer que F, H, P, Q, A, B sont homogènes en x et y et que l'équation $\mathrm{F} = 0$ n'a pas de racine double.

Nous pourrons alors écrire

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 x^\alpha y^\beta,$$

α et β étant des entiers positifs ou négatifs et H_1 un polynome entier en x et y.

Si alors on peut mettre H_1 sous la forme (4),

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{A}_1\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \mathrm{B}_1\frac{d\mathrm{F}}{dy}$$

(ce qui arrivera toujours si le degré de H_1 n'est pas plus petit que $2m - 3$), on pourra mettre H sous la forme (4 *bis*)

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}_1 x^\alpha y^\beta \frac{d\mathrm{F}}{dx} + \mathrm{B}_1 x^\alpha y^\beta \frac{d\mathrm{F}}{dy}.$$

Mais il est aisé de comprendre qu'un polynome H *quelconque* peut

toujours se mettre sous la forme

$$H_1 x^\alpha y^\beta,$$

le degré de H_1 *étant au moins égal à* $2m-3$. Car on peut, sans changer H, multiplier H_1 par x^μ (μ étant arbitraire), à condition de changer α en $\alpha-\mu$.

D'où cette conséquence :

Un polynome H *quelconque peut toujours se mettre sous la forme* (4 *bis*).

Comment maintenant passer de la forme (4 *bis*) à la forme (3 *bis*); un calcul tout à fait analogue à celui qui précède montrerait que A, B, P et Q sont liés par les équations

(5 *bis*)
$$\begin{cases} Z = \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{dQ}{dy}, \\ A = \dfrac{P}{2} + \dfrac{xZ}{m}, \\ B = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{yZ}{m}. \end{cases}$$

On en déduirait

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} = Z\left(\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m}\right).$$

De cette équation, on tirera Z et, par conséquent, P et Q, à moins que

(7)
$$\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m} = 0.$$

Cela montre que, si l'égalité (7) n'a pas lieu, le polynome H peut se mettre sous la forme (3 *bis*) et, par conséquent, que la relation (1 *bis*) a lieu.

D'où cette conséquence : le coefficient de $x^a y^b$ dans le développement est nul, à moins que l'on n'ait

$$\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m} = 0.$$

Mais

$$q = m + p - 1 = -a - b - 2.$$

La relation (7) peut donc s'écrire

$$a + b = -\frac{m}{2}.$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ ne contiendra donc que des termes tels que la somme $a + b$ soit égale à $-\frac{m}{2}$.

Ce résultat était évident d'avance; c'est une conséquence immédiate de l'homogénéité de la fonction $\frac{1}{\sqrt{F}}$.

Mais nous n'avons pas à regretter de l'avoir retrouvé par une voie détournée; car les équations intermédiaires que nous avons obtenues chemin faisant nous seront nécessaires dans la suite.

Mais poursuivons et supposons que la relation (7) ait lieu.

Alors les équations (5 *bis*) entraîneront

$$(8) \qquad \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} = 0.$$

Ainsi, pour que H puisse se mettre sous la forme (3 *bis*), il ne suffit plus qu'il puisse se mettre sous la forme (4 *bis*), il faut encore que la relation (8) ait lieu.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Car alors, en faisant

$$P = 2A, \qquad Q = 2B, \qquad \text{d'où} \qquad Z = 0,$$

on satisfait aux équations (5 *bis*). J'ajoute même qu'on peut satisfaire à ces équations (5 *bis*) d'une infinité de manières, car la fonction Z peut être choisie arbitrairement.

Nous sommes donc amenés à nous poser la question suivante :

Peut-on mettre H sous la forme (4 *bis*) et cela de telle façon que la relation (8) ait lieu?

La relation (8) montre que

$$B\,dx - A\,dy = dU$$

est une différentielle exacte; on aura donc

$$B = \frac{dU}{dx}, \qquad A = -\frac{dU}{dy},$$

et en vertu du théorème des fonctions homogènes

$$(p+1)U = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} = Bx - Ay.$$

U est donc un polynome en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$; il est homogène et de degré $p+1$ en x et y.

L'équation (4 *bis*) devient alors

$$(9) \qquad H = \frac{dF}{dx}\frac{dU}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{dU}{dx},$$

et nous avons à rechercher si l'on peut mettre H sous la forme (9).

Soit

$$U = Vx^{-\alpha}y^{-\beta},$$

V étant un polynome entier et homogène d'ordre h en x et en y, α et β étant deux entiers positifs; on devra donc avoir

$$h - \alpha - \beta = p + 1 = -\frac{m}{2}.$$

Quant à H, il sera de la forme

$$(10) \qquad H = Rx^{-\alpha-1}y^{-\beta-1},$$

R étant un polynome entier en x et y, homogène de degré $h+m$.

Le polynome R comprend $h+m+1$ coefficients et le polynome U n'en contient que $h+1$.

Quand nous voudrons mettre H sous la forme (9) nous n'aurons

donc que $h+1$ inconnues pour satisfaire à $h+m+1$ équations linéaires.

Des $h+m+1$ polynomes H de la forme (10) qui sont linéairement indépendants, il y en aura au plus $h+1$ que l'on pourra mettre sous la forme (9).

Je dis qu'il y en aura précisément $h+1$; le contraire ne pourrait arriver en effet que si un de ces polynomes pouvait se mettre de deux manières différentes sous la forme (9):

$$\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{d\mathrm{U}}{dy} - \frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{d\mathrm{U}'}{dy} - \frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{d\mathrm{U}'}{dx},$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{d(\mathrm{U}-\mathrm{U}')}{dx} - \frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{d(\mathrm{U}-\mathrm{U}')}{dy} = 0.$$

Cette équation exprime que $\mathrm{U}-\mathrm{U}'$ est fonction de F. Mais F est homogène de degré m et $\mathrm{U}-\mathrm{U}'$ homogène de degré

$$p+1 = -\frac{m}{2}.$$

On devrait donc avoir

$$\mathrm{U}-\mathrm{U}' = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}}},$$

Cela est impossible puisque $\mathrm{U}-\mathrm{U}'$ doit être rationnel.

Donc cette circonstance ne pourra se présenter.

Donc il y aura précisément $h+1$ polynomes indépendants qu'on pourra mettre sous la forme (9).

Il y en aura m qui ne pourront se mettre sous cette forme et qui seront linéairement indépendants entre eux et avec ceux qui peuvent se mettre sous la forme (9).

Mais le nombre h peut être pris aussi grand que l'on veut. Nous arrivons donc à la conclusion suivante:

Parmi tous les polynomes H, en nombre infini, il n'y en a que m qui ne peuvent se mettre sous la forme (9) et qui soient linéairement indépendants entre eux et avec ceux qui peuvent se mettre sous la forme (9).

Ou bien encore :

Les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ sont des fonctions transcendantes des coefficients de F. Mais toutes ces transcendantes ne sont pas distinctes entre elles. Il y a en tout seulement m transcendantes distinctes.

Deuxième cas; cas général.

Supposons que F soit un polynome entier de degré m, *non homogène* en x et en y.

Nous écrirons

$$F = F_m + F_{m-1} + \ldots + F_0$$

en désignant par F_k l'ensemble des termes homogènes et d'ordre k en x et en y.

Nous supposerons que l'équation $F_m = 0$ n'a pas de racine multiple. Nous ne supposerons plus, sauf avis contraire, que les polynomes H, P, Q, etc. sont homogènes.

Il s'agit de déterminer les relations de la forme (1) ou (1 *bis*); je vais commencer par étudier exclusivement les relations de la forme (1). Je supposerai donc que H, P et Q sont des polynomes entiers (homogènes ou non) en x et y; je me propose de chercher quels sont les polynomes H qui peuvent se mettre sous la forme (3).

Soit q le degré de H : écrivons

$$H = H_q + H_{q-1} + \ldots + H_0,$$

H_k représentant l'ensemble des termes homogènes et d'ordre k.

Comme H_q et F_m sont homogènes, comme $F_m = 0$ n'a pas de racine multiple, nous pourrons toujours trouver deux polynomes P_p et Q_p homogènes d'ordre $p = q - m + 1$ et tels que

$$H_q = \frac{dP_p}{dx} F_m + \frac{1}{2} \frac{dF_m}{dx} P_p + \frac{dQ_p}{dy} F_m + \frac{1}{2} \frac{dF_m}{dy} Q_p.$$

Cela sera toujours possible, comme nous l'avons vu, *à la condition*

que

$$q \geq 2m - 3.$$

Soit maintenant

$$H' = \frac{dP_p}{dx}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P_p + \frac{dQ_p}{dy}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q_p.$$

Le polynome H', qui peut se mettre sous la forme (3), ne sera plus homogène, mais il sera de degré q et l'ensemble des termes de degré q sera précisément H_q, de sorte que le polynome $H - H'$ sera de degré $q - 1$.

Ainsi, si $q \geq 2m - 3$, on pourra regarder H comme la somme de deux polynomes, l'un susceptible d'être mis sous la forme (3), et l'autre de degré moindre.

Le degré peut être ainsi abaissé jusqu'à $2m - 4$. Mais il n'y a que

$$(2m - 3)(m - 1)$$

polynomes linéairement indépendants d'ordre $2m - 4$.

Il y aura donc *au plus* $(2m - 3)(m - 1)$ polynomes non susceptibles d'être mis sous la forme (3), linéairement indépendants entre eux et de ceux qu'on peut mettre sous la forme (3).

Mais ce nombre peut encore être abaissé.

Soient P″ et Q″ deux polynomes quelconques d'ordre $m - 3$ au plus, et soit

$$H'' = \frac{dP''}{dx}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P'' + \frac{dQ''}{dy}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q''.$$

Il est clair que H″ sera d'ordre $2m - 4$ au plus.

Or il y a $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ polynomes d'ordre $m - 3$; donc nous pourrons trouver $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ polynomes P et autant de polynomes Q.

Nous pourrons donc former $(m - 2)(m - 1)$ polynomes H″; je dis qu'ils seront linéairement indépendants.

S'ils ne l'étaient pas, en effet, c'est qu'on pourrait trouver deux

polynomes P'' et Q'', d'ordre $m-3$ au plus et tels que

$$(11) \qquad \frac{dP''}{dy}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P'' + \frac{dQ''}{dy}F + \frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q'' = 0.$$

Soit p le degré de celui de ces deux polynomes dont le degré est le plus élevé ; nous aurons

$$p \leqq m-3.$$

Soient P''_p, Q''_p l'ensemble des termes de degré p de P'' et de Q''. P''_p et Q''_p ne pourront être identiquement nuls tous les deux.

On devrait avoir

$$(12) \qquad \frac{dP''_p}{dx}F_m + \frac{1}{2}\frac{dF_m}{dx}P''_p + \frac{dQ''_p}{dy}F_m + \frac{1}{2}\frac{dF_m}{dy}Q''_p = 0,$$

ou bien

$$(12\ bis) \quad \frac{dF_m}{dx}\left[\frac{P''_p}{2} + \frac{x}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx} + \frac{dQ''_p}{dy}\right)\right] + \frac{dF_m}{dy}\left[\frac{Q''_p}{2} + \frac{y}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx} + \frac{dQ''_p}{dy}\right)\right] = 0.$$

Comme $\frac{dF_m}{dx}$ et $\frac{dF_m}{dy}$ sont premiers entre eux, cela ne pourrait avoir lieu que si

$$\frac{P''_p}{2} + \frac{x}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx} + \frac{dQ''_p}{dy}\right) \quad \text{était divisible par} \quad \frac{dF_m}{dy},$$

et

$$\frac{Q''_p}{2} + \frac{y}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx} + \frac{dQ''_p}{dy}\right) \quad \text{divisible par} \quad \frac{dF_m}{dx}.$$

Mais $\frac{dF_m}{dx}$ et $\frac{dF_m}{dy}$ étant d'ordre $m-1$ ne peuvent diviser deux polynomes d'ordre plus petit. Donc la relation (12 *bis*) ne pourrait avoir lieu que si l'on avait

$$\frac{P''_p}{2} + \frac{x}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx} + \frac{dQ''_p}{dy}\right) = 0,$$
$$\frac{Q''_p}{2} + \frac{y}{m}\left(\frac{dP''_p}{dx} + \frac{dQ''_p}{dy}\right) = 0.$$

En différentiant la première équation par rapport à x, la seconde

par rapport à y, et ajoutant, en tenant compte du théorème des fonctions homogènes, on trouve

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{p+1}{m}\right)\left(\frac{dP''_p}{dx}+\frac{dQ''_p}{dy}\right)=0,$$

d'où

$$P'_p = Q'_p = 0,$$

ce qui est impossible, puisque P' et Q'_p ne peuvent s'annuler à la fois.

Les relations (11) et (12) sont donc impossibles.

Les $(m-2)(m-1)$ polynomes H'' sont distincts.

Il y a donc au plus

$$(2m-3)(m-1)-(m-2)(m-1)=(m-1)^2$$

polynomes H qui ne peuvent être mis sous la forme (3) et qui sont indépendants entre eux et de ceux qui sont de la forme (3).

Ce nombre peut-il être réduit davantage?

En d'autres termes, existe-t-il des polynomes d'ordre $2m-4$, autres que les polynomes H'', et susceptibles d'être mis sous la forme (3)?

Soit H un de ces polynomes et soit

$$(13) \qquad H=\frac{dP}{dx}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dx}P+\frac{dQ}{dy}F+\frac{1}{2}\frac{dF}{dy}Q.$$

Soit p le degré de P et de Q; on devra avoir

$$p > m-3,$$

sans quoi H serait un des polynomes H''.

Comme H est supposé de degré $2m-4$, les termes de degré $> 2m-4$ devront disparaître dans le second membre, en particulier les termes de degré $p+m-1$.

On aura donc

$$\frac{dP_p}{dx}F_m+\frac{1}{2}\frac{dF_m}{dx}P_p+\frac{dQ_p}{dy}F_m+\frac{1}{2}\frac{dF_m}{dy}Q_p=0.$$

ou bien

$$\frac{d}{dx}(P_p\sqrt{F_m}) + \frac{d}{dy}(Q_p\sqrt{F_m}) = 0,$$

ou bien

$$Q_p\sqrt{F_m} = \frac{dT}{dx}, \qquad P_p\sqrt{F_m} = -\frac{dT}{dy},$$

T étant une fonction de x et y homogène de degré $p + \frac{m}{2} + 1$.

Le théorème des fonctions homogènes donnera

$$\left(p + \frac{m}{2} + 1\right)T = \sqrt{F_m}(Q_p x - P_p y).$$

On verrait, comme plus haut dans l'étude de l'équation (6), que $Q_p x - P_p y$ est divisible par F_m.

On aura donc

$$Q_p x - P_p y = SF_m,$$

S étant un polynome homogène de degré $p + 1 - m$.

On aura alors

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{d}{dy}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right] + \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right] = 0,$$

d'où

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}\left[P\sqrt{F} + \frac{d}{dy}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right] + \frac{d}{dy}\left[Q\sqrt{F} - \frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

Or on a

$$-\frac{d}{dy}\left(SP^{\frac{3}{2}}\right) = P'\sqrt{F}, \qquad \frac{d}{dx}\left(SF^{\frac{3}{2}}\right) = Q'\sqrt{F},$$

P' et Q' étant des polynomes de degré p dont les termes d'ordre p sont précisément P_p et Q_p.

Il vient

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}(P - P')\sqrt{F} + \frac{d}{dy}(Q - Q')\sqrt{F},$$

ce qui montre que les polynomes P et Q peuvent être remplacés par les polynomes P − P' et Q − Q' qui sont de degré moindre.

Donc le degré des polynomes P et Q peut toujours être abaissé et cela jusqu'à $m-3$, de telle façon que H n'est autre chose qu'un polynome H''.

Il y a donc précisément $(m-1)^2$ polynomes *distincts* non susceptibles d'être ramenés à la forme (3).

Les coefficients du développement où les exposants $-a-1$ et $-b-1$ sont positifs dépendent donc au plus de $(m-1)^2$ transcendantes.

Exposants négatifs.

Il est facile d'étendre ces résultats à l'étude des relations de la forme (1 *bis*).

Supposons donc que H, P et Q soient des polynomes entiers, non plus en x et y, mais en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Nous poserons alors

$$H = \frac{H'}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}, \qquad P = \frac{P'}{x^{\alpha}y^{\beta+1}}, \qquad Q = \frac{Q'}{x^{\alpha+1}y^{\beta}},$$

où α et β sont des entiers positifs et H', P', Q' des polynomes entiers en x et y.

Les valeurs des entiers positifs α et β seront regardées comme fixes, mais pourront d'ailleurs être prises aussi grandes qu'on voudra. Je désignerai toujours par q le degré de H, c'est-à-dire le degré des termes de H dont le degré d'homogénéité en x et en y sera le plus élevé.

Je désignerai de même par p le degré de P et de Q.

Je représenterai par H_q l'ensemble des termes de degré q de H, par P_p et Q_p l'ensemble des termes de degré p de P et de Q.

Je désignerai par q' le degré de H', par p' celui de P' et de Q', de sorte qu'on aura

$$q' = q + \alpha + \beta + 2, \qquad p' = p + \alpha + \beta + 1,$$

d'où

$$q' = p' + m.$$

Les termes du degré le plus élevé de H', P' et Q' seront alors

$$x^{\alpha+1}y^{\beta+1}H_q, \qquad x^{\alpha}y^{\beta+1}P_p, \qquad x^{\alpha+1}y^{\beta}Q_p.$$

On tire de là

$$(14) \qquad H' = \frac{P'}{2}x\frac{dF}{dx} + \frac{Q'}{2}y\frac{dF}{dy} + F\left(x\frac{dP'}{dx} + y\frac{dQ'}{dy} - \alpha P' - \beta Q'\right).$$

Posons-nous maintenant le problème suivant :

Existe-t-il deux polynomes P'' et Q'' entiers et homogènes en x et y et tels que l'on ait

$$(15) \qquad \frac{H_q}{\sqrt{F_m}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F_m}}{x^{\alpha}y^{\beta+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F_m}}{x^{\alpha+1}y^{\beta}}\right).$$

La relation (15) peut s'écrire

$$H_q x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = \frac{P''}{2}x\frac{dF_m}{dx} + \frac{Q''}{2}y\frac{dF_m}{dy} + F_m Z,$$

en posant, pour abréger,

$$Z = x\frac{dP''}{dx} + y\frac{dQ''}{dy} - \alpha P'' - \beta Q''.$$

Nous devons d'abord nous demander si l'on peut mettre H_q sous la forme

$$(16) \qquad H_q x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = Ax\frac{dF_m}{dx} + By\frac{dF_m}{dy},$$

analogue à la forme (4). Dans cette équation, A et B sont des polynomes entiers et homogènes en x et y dont le degré est évidemment p'.

Nous supposerons, pour éviter toute difficulté, non seulement que l'équation $F_m = 0$ n'a pas de racine multiple, mais que $\frac{dF_m}{dy}$ n'est pas divisible par x, ni $\frac{dF_m}{dx}$ par y. Dans ces conditions, $x\frac{dF_m}{dx}$ et $y\frac{dF_m}{dy}$ sont premiers entre eux.

En raisonnant alors comme sur l'équation (4) on verrait que l'on peut toujours mettre H_q sous la forme (16), pourvu que

$$q' \geqq 2m - 1.$$

Une fois H_q mis sous la forme (16), nous déterminerons P'' et Q'' à l'aide des équations

$$A = \frac{P''}{2} + \frac{Z}{m},$$

$$B = \frac{Q''}{2} + \frac{Z}{m};$$

d'où l'on déduit

$$x\frac{dA}{dx} + y\frac{dB}{dy} = \alpha A - \beta B = Z\left(\frac{1}{2} + \frac{p+1}{m}\right).$$

On tirera de là Z et par conséquent P'' et Q'', à moins que l'on n'ait

$$(17) \qquad \frac{1}{2} + \frac{p+1}{m} = 0.$$

Donc, H_q pourra toujours se mettre sous la forme (15), pourvu que

$$q' \geqq 2m - 1, \qquad \frac{1}{2} + \frac{p+1}{m} \gtrless 0.$$

Si la relation (17) était satisfaite, on verrait, comme à propos de la discussion de l'équation (19), que, parmi les polynomes $H_q x^{\alpha+1} y^{\beta+1}$ de degré

$$q' = q + \alpha + \beta + 2 = \alpha + \beta + \frac{m}{2},$$

il n'y en a que m qui soient distincts et non susceptibles d'être mis sous la forme (15).

Posons maintenant

$$\frac{H''}{\sqrt{F}\, x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^{\alpha} y^{\beta+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F}}{x^{\alpha+1} y^{\beta}}\right).$$

Le polynome H″ ainsi défini est de la forme (14); ses termes du degré le plus élevé sont

$$H_q x^{\alpha+1} y^{\beta+1},$$

puisque P″ et Q″ sont définis par la relation (15).

Donc $H' - H''$ est de degré $q' - 1$; donc H′ est la somme de deux polynomes, l'un H″ de la forme (14), l'autre $H' - H''$ de degré moindre. Le degré de H′ peut donc être réduit, à moins qu'il ne soit plus petit que $2m - 1$, ou égal à $\alpha + \beta + \frac{m}{2}$.

De plus, parmi les polynomes de degré $\alpha + \beta + \frac{m}{2}$, il n'y en aura que m réellement distincts et dont le degré ne pourra être réduit (la réduction, une fois l'étape $\alpha + \beta + \frac{m}{2}$ franchie, pourra être poussée sans obstacle jusqu'à $2m - 2$).

Il n'y a donc que m polynomes réellement distincts, de degré plus grand que $2m - 2$ et non susceptibles d'être mis sous la forme (14).

Comme le nombre des polynomes de degré $2m - 2$ est égal à $m(2m - 1)$, nous pouvons conclure qu'il y a au plus $2m^2$ polynomes distincts qui ne peuvent se mettre sous la forme (14). Mais ce nombre peut encore être réduit; et, en effet, il y a des polynomes de degré $2m - 2$ qui peuvent se mettre sous la forme (14); on les obtient en prenant pour P′ et Q′ des polynomes quelconques de degré $m - 2$. Or il y a $\frac{m}{2}(m - 1)$ polynomes P′ et autant de polynomes de degré $m - 2$. Cela fera donc $m^2 - m$ polynomes de degré $m - 2$ et de la forme (14).

Je dis qu'ils sont tous linéairement indépendants.

Si, en effet, ils ne l'étaient pas, on pourrait trouver deux polynomes d'ordre $m - 2$, tels que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P'\sqrt{F}}{x^{\alpha} y^{\beta+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q'\sqrt{F}}{x^{\alpha+1} y^{\beta}}\right) = 0,$$

ou en appelant P″ et Q″ les termes d'ordre le plus élevé de P′ et de Q′

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F_m}}{x^{\alpha} y^{\beta+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F_m}}{x^{\alpha+1} y^{\beta}}\right) = 0.$$

Cette équation est de même forme que (15) (sauf que H_q est nul); elle entraînerait donc

$$Ax\frac{dF}{dx} + By\frac{dF}{dy} = 0,$$

ou (puisque A et B sont d'ordre inférieur à m étant du même ordre que P'' ou Q'' et que, d'autre part, $x\frac{dF}{dx}$ et $y\frac{dF}{dy}$ sont premiers entre eux)

$$A = 0, \qquad B = 0,$$

ce qui entraîne

$$P' = Q' = 0$$

[à moins que la relation (17) n'ait lieu; or nous pouvons toujours supposer le contraire, puisqu'elle entraînerait

$$p' = \alpha + \beta - \frac{m}{2} + 1;$$

que l'on a, d'ailleurs,

$$p' \leqq m - 2$$

et que l'on peut supposer α et β aussi grands que l'on veut]. Il faudrait donc que P'' et Q'' fussent nuls; et, comme ce sont les termes du degré le plus élevé de P' et de Q', il faudrait que P' et Q' fussent nuls.

Nos $m^2 - m$ polynomes sont donc linéairement indépendants. Il reste donc

$$2m^2 - (m^2 - m) = m^2 + m$$

polynomes réellement distincts et non susceptibles de se mettre sous la forme (14).

Comme cela a lieu, quelque grands que soient α et β, nous conclurons que nos coefficients dépendent au plus de $m^2 + m$ transcendantes distinctes.

Ce nombre peut-il encore être réduit?

Voici comment la question se pose : Nous avons trouvé qu'un certain nombre de polynomes en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ de la forme

$$(18) \qquad H = \frac{H'}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}},$$

où H' est un polynome d'ordre q' en x et y, pourraient être mis sous la forme (3 *bis*), et cela de telle façon que

$$(19) \qquad P = \frac{P'}{x^{\alpha} y^{\beta+1}}, \qquad Q = \frac{Q'}{x^{\alpha+1} y^{\beta}},$$

P' et Q' étant des polynomes d'ordre $p' = q' - m$ en x et en y.

Quand un polynome A pourra se mettre sous la forme (3 *bis*), et cela de telle façon que P et Q soient de la forme (19), je dirai, pour abréger, que H peut se mettre sous la forme (3 *ter*).

L'analyse qui précède montre que certains polynomes de la forme (18) peuvent se mettre sous la forme (3 *ter*); elle montre en même temps qu'il n'y en a pas d'autres.

Ce qu'il nous reste à voir, c'est si certains polynomes ne pourraient être mis sous la forme (3 *bis*) sans pouvoir être mis sous la forme (3 *ter*).

On aurait donc

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}(P\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(Q\sqrt{F}),$$

et l'on pourrait écrire

$$P = \frac{P'}{x^{a} y^{b+1}}, \qquad Q = \frac{Q'}{x^{a+1} y^{b}}.$$

Le polynome H pourrait ainsi se mettre sous la forme (3 *bis*); mais, pour que cette forme ne se confonde pas avec la forme (3 *ter*), il faut :

1° Ou bien que a soit plus grand que α;

2° Ou bien que b soit plus grand que β;

3° Ou bien enfin que le degré p' des polynomes P' et Q' soit plus grand que $q' - m$.

Nous pourrons, d'ailleurs, toujours supposer $a \geqq \alpha$, $b \geqq \beta$.

Je dis d'abord que, si $a > \alpha$, a peut être diminué d'une unité. On a en effet

$$(14\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} H' x^{a-\alpha} y^{b-\beta} = {} & \frac{P'}{2} x \frac{dF}{dx} + \frac{Q'}{2} y \frac{dF}{dy} \\ & + F\left(x \frac{dP'}{dx} + y \frac{dQ'}{dy} - aP' - bQ'\right). \end{aligned} \right.$$

Le premier membre étant divisible par x, il doit en être de même du second. Donc on aura pour $x = 0$

$$(20) \qquad \frac{Q'}{2} y \frac{dF}{dy} + F\left(y \frac{dQ'}{dy} - aP' - bQ'\right) = 0.$$

Nous supposerons que, pour $x = 0$, le polynome F est premier avec le polynome $y\frac{dF}{dy}\cdot$ Cette équation nous montre alors que, pour $x = 0$, Q' est divisible par F; soit donc

$$Q' = -aUF.$$

Cette égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$, U sera un polynome entier en y.

Posons maintenant

$$\frac{P''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{UF^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}\right), \qquad \frac{Q''\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b} = \frac{d}{dx}\left(\frac{UF^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}\right),$$

d'où

$$(21) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}\right) = 0,$$

et

$$Q'' = x\left(\frac{3}{2} U \frac{dF}{dx}\right) - aUF,$$

$$P'' = -y\left(\frac{dU}{dy} F + \frac{3}{2} U \frac{dF}{dy}\right) + bUF,$$

ce qui montre que pour $x = 0$, on a $Q'' = Q'$, et par conséquent, à cause de (20), $P' = P''$. Donc les deux polynomes $P' - P''$, $Q' - Q''$ sont divisibles par x.

Mais à cause de (21) on aura

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx} \frac{(P' - P'')\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy} \frac{(Q' - Q'')\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}.$$

Comme $P' - P''$ et $Q' - Q''$ sont divisibles par x, on voit que la valeur de a se trouve abaissée d'une unité. C. Q. F. D.

On démontrerait de même que b peut être abaissé d'une unité s'il est plus grand que β.

Je dis maintenant que p' peut être abaissé d'une unité s'il est plus grand que $q' - m$.

Je n'ai presque rien à changer à la démonstration analogue de la fin du paragraphe précédent.

Soient P″ et Q″ les termes du degré le plus élevé de P′ et de Q′, on devrait avoir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F_m}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q''\sqrt{F_m}}{x^{a+1} y^b}\right) = 0,$$

ou bien

$$\frac{Q''\sqrt{F_m}}{x^{a+1} y^b} = \frac{dT}{dx}, \qquad \frac{P''\sqrt{F_m}}{x^a y^{b+1}} = -\frac{dT}{dy},$$

ou

$$kT = \frac{\sqrt{F_m}}{x^a y^b}(Q'' - P''),$$

k étant le degré d'homogénéité de T; d'où

$$\sqrt{F_m}\,k\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}\frac{Q'' - P''}{x^a y^b}\frac{dF_m}{dx} + \frac{F_m}{x^a y^b}\frac{d}{dx}(Q'' - P'') - \frac{aF_m(Q'' - P'')}{x^{a+1} y^b} = \frac{Q'' F_m}{x^{a+1} y^b}.$$

Cette équation, que l'on peut multiplier par $x^{a+1} y^b$, montre que

$$(Q'' - P'')x\frac{dF_m}{dx}$$

est divisible par F_m; et, comme $x\dfrac{dF_m}{dx}$ est premier avec F_m, que $Q'' - P''$ est divisible par F_m.

Soit

$$Q'' - P'' = SF_m.$$

Nous poserons

$$\frac{Q'''\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b} = \frac{d}{dx}\frac{SF^{\frac{3}{2}}}{kx^a y^b}, \qquad \frac{P'''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} = -\frac{d}{dy}\frac{SF^{\frac{3}{2}}}{kx^a y^b}.$$

On en conclut :

1° Que Q''' et P''' ont mêmes termes de degré le plus élevé que Q'' et P'' de façon que les polynomes $P''-P'''$, $Q''-Q'''$ sont de degré moindre;

2° Que

$$\frac{d}{dx}\frac{P'''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy}\frac{Q'''\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b} = 0,$$

d'où enfin

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}\frac{(P''-P''')\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy}\frac{(Q''-Q''')\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}.$$

On voit que le degré des polynomes a été abaissé. C. Q. F. D.

La démonstration se trouverait en défaut si l'on avait

$$k = 0,$$

ou

$$p' + \frac{m}{2} = a + b,$$

ou

$$p + 1 + \frac{m}{2} = 0.$$

Dans ce cas on trouve simplement

$$Q'' = P''.$$

Nous ne pouvons donc plus affirmer que T soit de la forme

$$T = \frac{S F_m^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b},$$

où S est un polynome; ni même que T ne soit pas transcendant. La discussion faite plus haut à propos du cas où F était supposé homogène nous a même montré que parmi les intégrales de la forme

$$T = \int \frac{P''\sqrt{F_m}}{x^a y^b}\left(\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}\right),$$

où P'' est un polynome homogène d'ordre $a + b - \frac{m}{2}$; que parmi ces intégrales, dis-je, il y en a qui sont transcendantes et qui sont des combinaisons linéaires de m transcendantes distinctes.

Parmi les polynomes P'' il y en a donc m, distincts entre eux, et qui peuvent ainsi donner naissance à des transcendantes. Supposons cependant que l'intégrale T ne soit pas transcendante. Je dis qu'elle sera de la forme

$$\frac{S F_m^{\frac{2}{3}}}{x^a y^b}.$$

Pour nous en rendre compte, regardons un instant y comme une constante et développons suivant les puissances de $x - x_0$, x_0 étant une valeur quelconque de x.

Si x_0 n'est pas nul et si $(x - x_0)$ n'annule pas F_m, la quantité sous le signe $\int$ ne contiendra que des puissances entières et positives de $x - x_0$; il en sera donc de même de T; si x_0 n'est pas nul, $\frac{dT}{dx}$ ne contiendra que des puissances positives entières et impaires de $\sqrt{x - x_0}$. Cela montre que T est égal à une fonction T_0 de y, plus une fonction de x et de y, changeant de signe avec $\sqrt{x - x_0}$ et divisible par $(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$. Comme $\frac{dT}{dy}$ doit changer de signe avec $\sqrt{x - x_0}$), nous voyons que la fonction T_0 de y doit se réduire à une constante que nous pouvons laisser de côté; de sorte que finalement cette fonction ne contient $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$ qu'à des puissances impaires et au moins égales à 3.

La conclusion, c'est que T est divisible par $F_m^{\frac{3}{2}}$, puisque $\frac{T}{F_m^{\frac{3}{2}}}$ ne devient pas infini pour $x = x_0$; on a donc

$$T = \frac{S F^{\frac{3}{2}}}{x^\mu y^\nu}$$

et il nous reste à montrer que μ et ν sont précisément égaux à a et b. Pour cela développons suivant les puissances croissantes de x; le dé-

veloppement de $\frac{dT}{dx}$ commençant par un terme en x^{-a-1} et celui de $\frac{dT}{dy}$ par un terme en x^{-a}; celui de T devra commencer par un terme en x^{-a}; d'où $a = \mu$. C. Q. F. D.

Comme T est de la forme $\frac{SF^{\frac{3}{2}}}{x^a y^b}$, le reste du raisonnement se poursuivrait comme plus haut et le degré des polynomes ne peut être abaissé.

Nous n'avons donc à nous occuper que des m transcendantes T et des m polynomes P″ correspondant.

Soit $P'' = Q''$ l'un de ces polynomes; écrivons

$$H = \frac{d}{dx}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{P''\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}\right).$$

Nous aurons formé un polynome H qui peut se mettre sous la forme (3 *bis*); je dis qu'il ne peut se mettre sous la forme (3 *ter*). Si, en effet, il pouvait se mettre sous la forme (3 *ter*), on pourrait trouver deux polynomes P′ et Q′ dont les termes de degré le plus élevé sont P″ et $Q'' = P''$ et qui seraient tels que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P'\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{Q'\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b}\right) = 0.$$

Cela voudrait dire qu'il existerait une intégrale de différentielle totale

$$T = \int \frac{\sqrt{F}}{x^a y^b}\left(\frac{Q'\,dx}{x} - \frac{P'\,dy}{y}\right).$$

Cette intégrale devrait être transcendante et admettre des périodes cycliques, puisque, pour x et y très grands, elle se réduirait sensiblement à

$$\int \frac{\sqrt{F_m}}{x^a y^b}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)$$

qui est, par hypothèse, l'une de nos m transcendantes et qui admet des périodes cycliques.

Mais il est absurde de supposer que l'intégrale T admette des périodes cycliques. Elle ne pourrait en avoir, en effet, que si la surface

$$z^2 = F$$

admettait des *cycles linéaires*. Nous verrons plus loin qu'elle n'en admet pas, si le polynome F est indécomposable, ce qui est le cas général.

Donc l'hypothèse faite au début était absurde et nos polynomes ne peuvent se mettre sous la forme (3 *ter*).

Il y a donc m polynomes qui peuvent se mettre sous la forme (3 *bis*), sans pouvoir se mettre sous la forme (3 *ter*) et il n'y en a que m.

Il nous restait $m^2 + m$ polynomes distincts ne pouvant se mettre sous la forme (3 *ter*); il restera donc m^2 polynomes distincts ne pouvant se mettre sous la forme (3 *bis*). Ce nombre ne peut plus être réduit, au moins dans le cas général.

Donc les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ dépendent au plus de m^2 transcendantes distinctes.

Autre démonstration.

On pourrait encore raisonner comme il suit :

Donnons-nous la valeur de q' et choisissons-la de façon que la relation (17) n'ait pas lieu. Alors nous pourrons affirmer que tout polynome qui peut se mettre sous la forme (3 *bis*) peut aussi se mettre sous la forme (3 *ter*).

Il y a

$$\frac{(q'+1)(q'+2)}{2}$$

polynomes de degré q'. Les polynomes P′ et Q′ sont de degré

$$p' = q' - m.$$

Il y aura donc $\frac{(p'+1)(p'+2)}{2}$ polynomes P′ et autant de polynomes Q′.

Nous pourrons donc former

$$(p'+1)(p'+2)$$

combinaisons de la forme (3 *ter*).

Mais nous devons observer que toutes ces combinaisons ne sont pas distinctes; combien y aura-t-il de relations entre elles? Pour former toutes ces relations, nous n'avons qu'à rechercher toutes les identités de la forme

$$(22) \qquad \frac{d}{dx}\frac{P'\sqrt{F}}{x^a y^{b+1}} + \frac{d}{dy}\frac{Q'\sqrt{F}}{x^{a+1} y^b} = 0;$$

cette identité montre que

$$T = \int \frac{\sqrt{F}}{x^a y^b}\left(\frac{Q'\,dx}{x} - \frac{P'\,dy}{y}\right)$$

est une intégrale de différentielle totale.

Je dis que cette intégrale ne peut être transcendante. En effet, si elle était transcendante, il faudrait qu'elle eût, soit des périodes cycliques, soit des périodes polaires.

J'appelle *période cyclique* celle que l'on obtient quand le point x, y décrit un contour fermé (cycle linéaire) (ce contour fermé ne pouvant, par déformation continue, être ramené à un contour infiniment petit sans passer par un point singulier).

J'appelle *période polaire* celle que l'on obtient quand le point x, y décrit un contour fermé infiniment petit autour d'un point pour lequel la fonction sous le signe $\int$ devient infinie.

Il n'y a pas de période cyclique.

Et, en effet, un cycle linéaire, s'il existait, pourrait toujours être décomposé en cycles élémentaires formés chacun d'un double lacet entourant deux points de la courbe $F(x, y) = 0$; tel est le double lacet qui, enveloppant les deux points ± 1, définit l'une des périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Mais si la courbe $F(x, y) = 0$ est indécomposable, ce que nous supposerons, les deux points de cette courbe enveloppés par le double lacet peuvent s'échanger et se confondre, de sorte que le lacet devient infiniment petit.

Il n'y a donc pas de cycle linéaire.

Il n'y a pas non plus de période polaire.

En effet, la fonction sous le signe $\int$ ne devient infinie que pour $x = 0$ et pour $y = 0$.

Développons suivant les puissances de x; le développement de $\frac{dT}{dx}$ se présentera sous la forme

$$\sum \frac{A_\mu}{x^\mu},$$

où A_μ est une fonction de y; considérons en particulier le terme

$$\frac{A_1}{x};$$

c'est celui-là qui, par intégration, pourrait introduire la transcendante

$$A_1 Lx.$$

Mais alors il y aurait dans $\frac{dT}{dy}$ le terme $Lx\frac{dA_1}{dy}$, et comme ce terme n'existe pas, c'est que $\frac{dA_1}{dy} = 0$, c'est-à-dire que A_1 est une constante.

Mais, d'autre part, A_1 doit changer de signe avec $\sqrt{F}$. Donc, A_1 est nul.

Nous n'aurons donc ni la transcendante Lx, ni pour la même raison la transcendante Ly.

Donc l'intégrale T est algébrique.

Considérons maintenant y comme une constante et soit x_0 une valeur quelconque de x. Si cette valeur n'annule pas F, nous verrons, comme plus haut, que T est développable suivant les puissances de $x - x_0$; si cette valeur annule F, nous verrons comme plus haut que T est divisible par $(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$.

Nous conclurons de tout cela que T est divisible par $F^{\frac{3}{2}}$, et nous écrirons

$$T = \frac{SF^{\frac{3}{2}}}{x^{\mu} y^{\nu}},$$

S étant un polynome. On verrait, comme plus haut, que

$$\mu = a, \qquad \nu = b,$$

ce qui donne

$$T = \frac{SP^{\frac{3}{2}}}{x^{a} y^{b}}.$$

On voit que S est un polynome de degré $p' - m$.

Il y aura autant de relations (22) que de polynomes S; c'est-à-dire

$$\frac{(p' - m + 1)(p' - m + 2)}{2}.$$

Il y a donc

$$(p' + 1)(p' + 2) - \frac{(p' - m + 1)(p' - m + 2)}{2}$$

combinaisons distinctes de la forme (3 *ter*), et

$$\frac{(q' + 1)(q' + 2)}{2} - (p' + 1)(p' + 2) + \frac{(p' - m + 1)(p' - m + 2)}{2} = m^2$$

polynomes distincts non susceptibles d'être mis sous la forme (3 *bis*).

C. Q. F. D.

Cas des racines multiples.

Dans l'exposé qui précède, nous avons fait diverses hypothèses; nous avons supposé entre autres choses que l'équation $F_m = 0$ n'avait pas de racines multiples.

Mais toutes ces hypothèses n'avaient pas pour effet de restreindre la généralité. C'est ainsi que le cas où l'équation a des racines multiples est un cas particulier de celui où elle n'en a pas.

Mais, dans le cas général, il y a entre les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{F}}$ un certain nombre de relations linéaires.

Le passage à la limite suffirait pour montrer qu'il y en a au moins autant dans un cas particulier quelconque.

Les coefficients dépendent, dans le cas général, d'un certain nombre de transcendantes distinctes; dans les différents cas particuliers, ce nombre peut diminuer, mais il ne peut jamais augmenter.

Nous avons vu qu'il y a m^2 polynomes distincts non susceptibles de se mettre sous la forme (3 *bis*); il y en aura *au plus* m^2 dans les cas particuliers.

La discussion de chaque cas particulier serait sans doute intéressante, mais je me bornerai aux cas qui se présentent en Astronomie.

Application à la fonction perturbatrice.

Nous avons posé dans l'introduction

$$e^{iu} = x, \qquad e^{iu'} = y,$$

u et u' étant les deux anomalies excentriques.

Alors les coordonnées de la première planète sont de la forme

$$\frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x,$$

tandis que celles de la seconde sont de la forme

$$\frac{c_1}{y} + c_2 + c_3 y.$$

Le carré de la distance des deux planètes D^2 sera donc un polynome du deuxième degré en $x, y, \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. C'est ce polynome que j'appellerai désormais $F(x, y)$: il contiendra des termes en

$$x^2, y^2, xy, x, y, 1, x^{-2}, y^{-2}, x^{-1}y^{-1}, x^{-1}, y^{-1}, xy^{-1}, x^{-1}y.$$

Je poserai aussi quelquefois

$$x^2 y^2 F(x, y) = F'(x, y),$$

et $F'(x, y)$ sera un polynome entier en x et y.

Pour avoir le coefficient de x^2, il suffit de donner à u une valeur dont la partie imaginaire est négative et très grande, u' conservant une valeur finie. Alors la distance D est sensiblement égale à la distance de la première planète à l'origine, c'est-à-dire à

$$a(1 - e\cos u) = a\left(1 - \frac{ex}{2} - \frac{e}{2x}\right)$$

ou sensiblement $-\frac{aex}{2}$.

Le coefficient de x^2 est donc $\frac{a^2 e^2}{4}$, a étant le grand axe et e l'excentricité. La même analyse montre que le coefficient de x^{-2} est le même.

De même les coefficients de y^2 et y^{-2} sont tous deux égaux à $\frac{a'^2 e'^2}{4}$, a' et e' étant le grand axe et l'excentricité de la seconde planète.

Pour trouver le coefficient de xy observons que, si les parties imaginaires de u et de u' sont toutes deux négatives et très grandes, chacune des planètes se trouvera sur l'ellipse qu'elle décrit en un point très éloigné de l'origine. Si donc nous appelons λ l'angle de l'asymptote (imaginaire) à l'une de ces ellipses avec l'asymptote de l'autre ellipse, le coefficient de $2xy$ sera

$$\frac{aea'e'}{4}\cos\lambda.$$

L'angle λ est toujours imaginaire et $\cos\lambda$ plus grand que 1 s'il est réel.

Comme chaque ellipse a deux asymptotes, nous avons quatre angles λ qui correspondent aux coefficients de

$$2xy, \quad 2xy^{-1}, \quad 2x^{-1}y, \quad 2x^{-1}y^{-1}.$$

L'angle λ ne peut être égal ni à o, ni à π, puisque les asymptotes sont imaginaires et situées dans deux plans réels différents. Les termes du second degré de $F(x, y)$ ne peuvent donc se réduire à un carré parfait.

Si l'une des excentricités est nulle, e par exemple, les termes en x^2 et x^{-2} disparaissent; mais le terme en xy ne disparaît pas, bien que son coefficient

$$\frac{aea'e'}{4}\cos\lambda$$

contienne e en facteur, parce que $\cos\lambda$ devient infini.

Quant à $F'(x, y) = x^2y^2F(x, y)$, c'est un polynome du sixième degré, généralement indécomposable.

La courbe

$$F'(x, y) = 0$$

est une courbe du sixième degré avec un point double à l'origine et deux points doubles à l'infini.

Cette courbe se décompose dans deux cas:

1° Si l'inclinaison est nulle, elle se décompose alors en deux courbes du troisième degré.

2° Si les deux excentricités sont nulles, elle a alors pour composantes les deux axes de coordonnées et une courbe du quatrième degré avec deux points doubles à l'infini.

Alors $F(x, y)$ admet des termes en

$$xy, \quad x, \quad y, \quad 1, \quad x^{-1}, \quad y^{-1}, \quad x^{-1}y^{-1}, \quad x^{-1}y, \quad xy^{-1}.$$

Mais, de plus, le polynome présente une symétrie particulière.

Il ne change pas quand on permute x et y, ni quand on change x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$.

Je n'examinerai dans la suite que le cas général et celui où les deux excentricités sont nulles.

Bien d'autres cas particuliers mériteraient quelque attention : celui où l'inclinaison est nulle, celui où les deux grands axes coïncident entre eux et avec l'intersection des plans des orbites, celui où ces deux

plans se coupent à angle droit et où leur intersection coïncide avec le grand axe de l'une des deux orbites, etc.

Intégrales de différentielles totales.

Il paraît nécessaire de revenir sur la démonstration que j'ai donnée de ce fait que les intégrales de différentielles totales dépendant de $\sqrt{F}$ ne peuvent être transcendantes, afin de voir si elle s'applique aux cas particuliers que je veux maintenant étudier en détail.

Quand M. Picard a annoncé, pour la première fois, que la surface la plus générale de son degré ne possède pas de cycle linéaire, ce fait a causé un grand étonnement. On sera moins étonné maintenant que la surface

$$z^2 = F$$

n'en possède pas non plus quand le polynome F est indécomposable.

Revenons sur la démonstration. Soit A un point singulier quelconque, c'est-à-dire un ensemble de valeurs complexes de x et de y qui annule $F(x, y)$. J'appellerai *lacet* un chemin d'intégration composé comme il suit. On prendra pour point de départ un point quelconque O non singulier, choisi comme origine de tous les lacets. On ira de O à un point A' infiniment voisin de A en suivant un chemin quelconque; on décrira un contour infiniment petit enveloppant le point A, de façon à revenir au point A', et l'on reviendra de A' en O par le même chemin.

Le lacet sera dit *rectiligne* si le chemin OA' est rectiligne.

Je représenterai par (A) l'intégrale prise le long de ce lacet en partant du point O en attribuant au radical un signe convenu une fois pour toutes. Je la représenterai par [A] si le lacet est rectiligne. Je remarque deux choses : 1° une période quelconque de l'intégrale sera une combinaison linéaire à coefficients entiers de périodes de la forme

$$[A] - [B],$$

A et B étant deux points singuliers quelconques.

2° Soient deux lacets, l'un rectiligne, l'autre non rectiligne, enveloppant un même point singulier A. Soient [A] et (A) les deux intégrales correspondantes ; la différence

$$(A) - [A]$$

sera égale au double d'une période.

Cela posé, supposons d'abord le polynome F indécomposable, et supposons que nous ayons $n+1$ points singuliers qui peuvent être distincts

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n.$$

Nous pourrons alors avoir n périodes distinctes

$$[A_0] - [A_1], \quad [A_1] - [A_2], \quad \ldots, \quad [A_{n-1}] - [A_n].$$

Je dis qu'elles sont toutes nulles.

En effet, le polynome F étant indécomposable, les points A_0 et A_1 peuvent s'échanger. Je puis faire varier d'une manière continue A_0 de façon qu'il vienne en A_1. Le lacet rectiligne entourant A_0 se changera en un lacet, généralement non rectiligne, entourant A_1, de sorte qu'on aura

$$[A_0] = (A_1).$$

Mais $(A_1) - [A_1]$ est le double d'une période. Nous avons donc entre nos n périodes une équation linéaire à coefficients entiers. Le coefficient de $[A_0] - [A_1]$ est impair, celui des autres périodes est pair.

Nous trouverions de même $n-1$ autres équations linéaires. Le déterminant de ces équations ne saurait être nul. En effet, il est

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Donc les n périodes sont nulles. C. Q. F. D.

Qu'arrive-t-il maintenant si le polynome F est décomposable? Si alors A_0 et A_1 appartiennent à deux facteurs différents de F, A_0 ne s'échange plus avec A_1. Mais voici comment on peut raisonner.

En faisant varier A_0 et A_1 d'une manière continue, je pourrai les amener en deux points B_0 et B_1 infiniment voisins l'un de l'autre et infiniment voisins de l'un des points d'intersection des deux courbes dans lesquelles se décompose la courbe $F = 0$.

Alors les lacets rectilignes $[A_0]$ et $[A_1]$ se changent dans les lacets non rectilignes (B_0) et (B_1), de sorte que

$$[A_0] - [B_0], \quad [A_1] - [B_1]$$

seront des doubles périodes.

Maintenant, en faisant varier d'une manière continue B_0 et B_1, je puis faire tourner B_0 autour de B_1; alors $[B_0]$ et $[B_1]$ se changent respectivement en

$$3[B_0] - 2[B_1], \quad 2[B_0] - [B_1],$$

d'où

$$[B_0] = 3[B_0] - 2[B_1]$$

ou

$$[B_0] = [B_1].$$

On en conclut que $[A_0] - [A_1]$ est encore une double période, et le reste de la démonstration se poursuit comme plus haut.

Cette démonstration suppose que B_0 peut tourner autour de B_1, sans qu'aucun autre point singulier soit très voisin de B_0 et de B_1. C'est ce qui arrivera si la courbe

$$F = 0$$

se décompose en plusieurs courbes irréductibles, mais de telle sorte qu'aucun point d'intersection de deux de ces courbes composantes n'appartienne à plus de deux composantes et ne soit pas un point double pour l'une d'elles.

La démonstration s'applique donc, soit dans le cas général du problème du développement de la fonction perturbatrice, soit dans le cas particulier où les deux excentricités sont nulles.

Ainsi les intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int (\mathrm{R}\,dx + \mathrm{S}\,dy),$$

où R et S sont rationnels en x, y et

$$z = \sqrt{\mathrm{F}(x, y)}$$

ne peuvent avoir de périodes cycliques, mais seulement des périodes polaires.

Elles ne peuvent donc être transcendantes sans être logarithmiques. Elles seront donc de la forme suivante :

$$\mathrm{A}_1 \log \mathrm{R}_1 + \mathrm{A}_2 \log \mathrm{R}_2 + \ldots + \mathrm{A}_p \log \mathrm{R}_p + \mathrm{T},$$

où R_1, R_2, ..., R_p et T sont rationnels en x, y, z et où A_1, A_2, ..., A_p sont des constantes.

Mais il y a plus : si R (ainsi que S) est égal à z multiplié par une fonction rationnelle de x et de y, notre intégrale doit changer de signe quand on change z en z, de telle sorte qu'elle devra être de la forme

$$\mathrm{A}_1 \log \frac{\mathrm{P}_1(x, y, z)}{\mathrm{P}_1(x, y, -z)} + \mathrm{A}_2 \log \frac{\mathrm{P}_2(x, y, z)}{\mathrm{P}_2(x, y, -z)} + \ldots$$
$$+ \mathrm{A}_p \log \frac{\mathrm{P}_p(x, y, z)}{\mathrm{P}_p(x, y, -z)} + z\mathrm{U},$$

où U est rationnel en x et y, où les P sont des polynomes en x, y, z et les A des constantes.

Alors le dénominateur commun de R et S doit être de la forme

$$\mathrm{P}_1(x, y, z)\,\mathrm{P}_1(x, y, -z)\,\mathrm{P}_2(x, y, z)\,\mathrm{P}_2(x, y, -z) \ldots \mathrm{P}_p(x, y, z)\,\mathrm{P}_p(x, y, -z).$$

Nous sommes donc conduits à la règle suivante :

Soit

$$\int z \frac{\mathrm{B}\,dx + \mathrm{C}\,dy}{\mathrm{D}}$$

une intégrale de différentielle totale, où B, C, D sont des polynomes entiers en x et y. Supposons cette intégrale logarithmique et soit D_1 l'un des facteurs de D.

La courbe gauche

$$D_1 = 0, \qquad F = z^2$$

doit se décomposer en deux autres.

Dans les intégrales que nous avons à envisager, le dénominateur est de la forme

$$x^\alpha y^\beta,$$

α et β étant des entiers; il n'y aurait donc aucune difficulté si les deux courbes gauches

$$x = 0, \qquad F' = z^2,$$

$$y = 0, \qquad F' = z^2$$

étaient indécomposables. Mais ce n'est pas ce qui arrive. Pour $x = 0$, F' se réduit à $a^2 y^2$, et pour $y = 0$, à $b^2 x^2$, a et b étant des coefficients constants.

La démonstration donnée plus haut dans un cas analogue n'est donc plus applicable et il faut en chercher une nouvelle.

S'il existait une intégrale logarithmique, elle serait de la forme

$$\int \frac{A\,dx + B\,dy}{x^\alpha y^\beta} \sqrt{F'},$$

A et B étant des polynomes en x et y.

Si nous faisons $x =$ const., elle deviendrait

$$\int C\,dy \sqrt{F'},$$

qui devrait admettre une période polaire quand on tournerait autour de $y = 0$, et ne devrait pas admettre de période cyclique.

C serait un polynome entier en y et $\frac{1}{y}$.

Comme F′ est un polynome du quatrième degré en y, je poserai

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{F'}} = u,$$

et je désignerai par y_0, y_1, y_2, y_3 les quatre racines de l'équation

$$F' = 0.$$

Nous aurons alors

$$y = k \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)}{\sigma(u-b)\sigma(u+b)},$$

où k, a et b sont des constantes.

Alors CF′ qui est un polynome entier en y et $\frac{1}{y}$ sera une fonction doublement périodique de u, ne changeant pas quand on change u en $-u$. Elle admettra quatre pôles, à savoir $\pm a$ et $\pm b$.

Nous aurons

$$\int C\,dy\sqrt{F'} = \int CF'\,du.$$

Décomposons CF′ en éléments simples, il viendra

$$\begin{aligned} CF' = m\zeta(u-a) - m\zeta(u+a) + n\zeta(u-b) - n\zeta(u+b) + p \\ + q[\zeta'(u-a) + \zeta'(u+a)] + r[\zeta'(u-b) + \zeta'(u+b)] + H, \end{aligned}$$

où m, n, p, q, r sont des coefficients constants et où H dépend des dérivées secondes des ζ ou des dérivées d'ordre plus élevé.

La partie transcendante de l'intégrale sera donc

$$\begin{aligned} m \log \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+a)} + n \log \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+b)} + pu \\ + q[\zeta(u-a) + \zeta(u+a)] + r[\zeta(u-b) + \zeta(u+b)]. \end{aligned}$$

Notre intégrale ne doit pas admettre de période cyclique, cette partie transcendante ne doit donc pas changer quand u augmente de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$.

Si u augmente de 2ω, $\zeta(u)$ augmente de 2η et $\sigma(u)$ est multiplié

par

$$-e^{2\eta(u+\omega)}.$$

Donc notre transcendante augmente de

$$-4m\eta a - 4n\eta b + 2p\omega + 4(q+r)\eta.$$

Cette expression doit s'annuler quand on donne à ω, soit l'indice 1, soit l'indice 2, en donnant à η l'indice correspondant.

On aura donc

$$ma + nb = q + r, \qquad p = 0.$$

Faisons maintenant varier x d'une manière continue; a et b varieront d'une manière continue, m, n, q et r restent constants et p doit rester nul.

Il y a deux valeurs de x pour lesquelles une des racines de $F = 0$ (je puis toujours supposer que c'est celle que j'ai appelée y_0) devient nulle. Si x tourne autour d'une de ces deux valeurs, en décrivant un cercle très petit, y_0 tourne autour de 0. Alors a se change en $-a$ et b ne change pas.

Comme notre relation doit toujours subsister, nous aurions

$$-ma + nb = q + r,$$

d'où $m = 0$.

Nous trouverions de même $n = 0$, d'où $q + r = 0$.

Cela montre que notre intégrale est algébrique. C. Q. F. D.

Cette démonstration s'applique au cas général; dans le cas particulier où les excentricités sont nulles, la démonstration est encore plus facile.

En effet, si l'intégrale est de la forme

$$\int \frac{A\,dx + B\,dy}{x^\alpha y^\beta}\sqrt{F},$$

elle ne pourrait avoir de point singulier logarithmique que pour $x = 0$, ou $y = 0$, ou $x = \infty$, ou $y = \infty$.

Or F' est égal à xy, multiplié par un polynome du deuxième degré tant en x qu'en y.

Si donc on suppose x très petit et qu'on développe suivant les puissances de x, on n'aura que des puissances *impaires* de $\sqrt{x}$; on n'aura donc pas de terme en

$$\frac{dx}{x}$$

qui introduirait un logarithme.

Donc $x = 0$ n'est pas un point singulier logarithmique et il en est de même de $y = 0$, $x = \infty$, $y = \infty$. C. Q. F. D.

Cas général.

Nous avons vu que dans le cas général, c'est-à-dire si les excentricités ne sont pas nulles, ni les inclinaisons, F est un polynome du deuxième degré.

Désormais, sauf avis contraire, *j'entends par polynome de degré p, un polynome de degré p en x, y,* $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, de telle sorte que dans chacun de ses termes la somme des valeurs absolues des exposants de x et de y soit au plus égale à p.

Soit alors H un polynome de degré q. Il s'agit de savoir si l'on peut trouver deux polynomes P et Q de degré p et tels que

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}(xP\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(yQ\sqrt{F}),$$

d'où

$$(23)\quad H = F\left(x\frac{dP}{dx} + y\frac{dQ}{dy} + P + Q\right) + \frac{1}{2}\left(xP\frac{dF}{dx} + yQ\frac{dF}{dy}\right).$$

Nous généraliserons en supposant que F est un polynome de degré m.

Si l'on a

$$q = p + m,$$

nous dirons que le polynome H peut se mettre sous la forme (23 *bis*).

Si l'on a

$$q < p + m,$$

de telle façon que les termes de degré $p + m$ se détruisent dans le second membre de (23), nous dirons que H peut se mettre sous la forme (23 *ter*) et ce que nous avons d'abord à établir, c'est que si H peut se mettre sous la forme (23 *ter*), il peut se mettre sous la forme (23 *bis*).

Pour cela, j'adopterai la notation suivante. J'appellerai

H_1 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en x et y;

H_2 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en x et $\frac{1}{y}$;

H_3 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en $\frac{1}{x}$ et y;

H_4 l'ensemble des termes de H du degré le plus élevé (c'est-à-dire de degré q), en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Je définirai de même F_1, F_2, F_3, F_4, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Je remarque que H_1 et H_2 ont un terme commun, le terme en x^q; je l'appellerai H_{12}; je définirai de même H_{13}, H_{24}, H_{34}, F_{12}, ... Cela posé, en prenant les termes du degré le plus élevé, en x et y, on aura si $q = p + m$,

$$H_1 = F_1\left(x\frac{dP_1}{dx} + y\frac{dQ_1}{dy} + P_1 + Q_1\right) + \frac{1}{2}\left(xP_1\frac{dF_1}{dx} + yQ_1\frac{dF_1}{dy}\right).$$

Si, au contraire, H est de la forme (23 *ter*), les termes de degré $p + m$ doivent disparaître, et l'on aura

$$(24)\quad 0 = F_1\left(x\frac{dP_1}{dx} + y\frac{dQ_1}{dy} + P_1 + Q_1\right) + \frac{1}{2}\left(xP_1\frac{dF_1}{dx} + yQ_1\frac{dF_1}{dy}\right)$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(xP_1\sqrt{F_1}\right) + \frac{d}{dy}\left(yQ_1\sqrt{F_1}\right) = 0.$$

Cela montre que

$$yQ_1\sqrt{F_1}\,dx - xP_1\sqrt{F_1}\,dy$$

est une différentielle exacte que j'appellerai

$$d(T\sqrt{F_1}).$$

C'est une fonction homogène de degré $p+2+\frac{m}{2}$ en x et y : on a donc

$$\left(p+2+\frac{m}{2}\right)T\sqrt{F_1} = xy\sqrt{F_1}(Q_1 - P_1).$$

Je poserai $Q_1 - P_1 = R_1$, et je trouverai

$$\left(p+2+\frac{m}{2}\right)yQ_1\sqrt{F_1} = \frac{d}{dx}(xyR_1\sqrt{F_1})$$

ou

$$(25)\quad \left(p+2+\frac{m}{2}\right)yQ_1F_1 = yR_1F_1 + xy\frac{dR_1}{dx}F_1 + \frac{1}{2}xyR_1\frac{dF_1}{dx}.$$

Cette équation montre que $x\frac{dF_1}{dx}R_1$ est divisible par F_1 (et comme F_1 est premier avec $x\frac{dF_1}{dx}$, dans le cas général), que R_1 est divisible par F_1 (remarquons en passant que, d'après leur définition, F_1, P_1, Q_1, R_1 sont des polynomes entiers en x et y). Soit donc

$$R_1 = \left(p+2+\frac{m}{2}\right)S_1F_1.$$

On voit que S_1 sera un polynome entier homogène et d'ordre $p-m$ en x et y. On aura d'ailleurs

$$yQ_1\sqrt{F_1} = \frac{d}{dx}\left(xyS_1F_1^{\frac{3}{2}}\right), \qquad xP_1\sqrt{F_1} = -\frac{d}{dy}\left(xyS_1F_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

Les termes du degré $p+m$ en x et $\frac{1}{y}$ doivent disparaître, ce qui

donne

$$\frac{d}{dx}(x\mathrm{P}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}) + \frac{d}{dy}(y\mathrm{Q}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}) = 0,$$

ou bien

$$y\mathrm{Q}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}\,dx - x\mathrm{P}_2\sqrt{\mathrm{F}_2}\,dy = d(\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_2}),$$

$\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_2}$ étant une fonction homogène de degré $p+\frac{m}{2}$ en x et $\frac{1}{y}$; on a donc, par le théorème des fonctions homogènes,

$$\left(p+\frac{m}{2}\right)\mathrm{T}\sqrt{\mathrm{F}_2} = xy\sqrt{\mathrm{F}_2}(\mathrm{Q}_2+\mathrm{P}_2).$$

Si je pose $\mathrm{Q}_2+\mathrm{P}_2 = \mathrm{R}_2$, je retrouverai une équation analogue à (25), où le coefficient $p+2+\frac{m}{2}$ sera remplacé par $p+\frac{m}{2}$ et où l'indice 1 sera partout remplacé par l'indice 2. Cette équation montre que R_2 est divisible par F_2. Posons donc

$$\mathrm{R}_2 = \left(p+\frac{m}{2}\right)\mathrm{S}_2\mathrm{F}_2;$$

S_2 sera un polynome homogène de degré $p-m$ en x et $\frac{1}{y}$ et l'on aura

$$y\mathrm{Q}_2\sqrt{\mathrm{F}_2} = \frac{d}{dx}\left(xy\mathrm{S}_2\mathrm{F}_2^{\frac{3}{2}}\right), \qquad x\mathrm{P}_2\sqrt{\mathrm{F}_2} = -\frac{d}{dy}\left(xy\mathrm{S}_2\mathrm{F}_2^{\frac{3}{2}}\right).$$

On démontrerait de même qu'on aura

$$y\mathrm{Q}_3\sqrt{\mathrm{F}_3} = \frac{d}{dx}\left(xy\mathrm{S}_3\mathrm{F}_3^{\frac{3}{2}}\right), \qquad x\mathrm{P}_3\sqrt{\mathrm{F}_3} = -\frac{d}{dy}\left(xy\mathrm{S}_3\mathrm{F}_3^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$y\mathrm{Q}_4\sqrt{\mathrm{F}_4} = \frac{d}{dx}\left(xy\mathrm{S}_4\mathrm{F}_4^{\frac{3}{2}}\right), \qquad x\mathrm{P}_4\sqrt{\mathrm{F}_4} = -\frac{d}{dy}\left(xy\mathrm{S}_4\mathrm{F}_4^{\frac{3}{2}}\right),$$

S_3 et S_4 étant des polynomes homogènes de degré $p-m$ en $\frac{1}{x}$ et y et en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

S_1 et S_2 contient un terme en x^{p-m}; soit S_{12} celui de S_1, S_{21} celui de S_2; je vais démontrer que $\mathrm{S}_{12} = \mathrm{S}_{21}$.

De

$$R_1 = \left(p + 2 + \frac{m}{2}\right) S_1 F_1, \qquad R_2 = \left(p + \frac{m}{2}\right) S_2 F_2,$$

on tire, en égalant les termes indépendants de y,

$$(Q_{12} - P_{12}) = \left(p + 2 + \frac{m}{2}\right) S_{12} F_{12},$$

$$(Q_{12} + P_{12}) = \left(p + \frac{m}{2}\right) S_{24} F_{12};$$

il faut donc démontrer que

$$\left(p + \frac{m}{2}\right)(Q_{12} - P_{12}) = \left(p + 2 + \frac{m}{2}\right)(Q_{12} + P_{12}),$$

ou

$$\left(p + 1 + \frac{m}{2}\right) P_{12} + Q_{12} = 0.$$

Égalons dans (24) les termes indépendants de y; ces termes, dans

$$P_1 \quad Q_1, \quad F_1, \quad x\frac{dF_1}{dx}, \quad x\frac{dP_1}{dx},$$

sont respectivement

$$P_{12}, \quad Q_{12}, \quad F_{12}, \quad mF_{12}, \quad pP_{12}.$$

Il vient donc

$$pP_{12} + P_{12} + Q_{12} + \frac{m}{2} P_{12} = 0,$$

ou

$$\left(p + 1 + \frac{m}{2}\right) P_{12} + Q_{12} = 0.$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de même que

S_1 et S_3 ont même terme en y^{p-m},
S_2 et S_4 » y^{m-p},
S_3 et S_4 » x^{m-p}.

Il existe donc un polynome S de degré $p - m$, où

Les termes de degré $p - m$ en x et y sont S_1,

» x et $\frac{1}{y}$ » S_2,

» $\frac{1}{x}$ et y » S_3,

» $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ » S_4.

Posons alors

$$yQ''\sqrt{F} = \frac{d}{dx}\left(xyS F^{\frac{3}{2}}\right), \qquad xP''\sqrt{F} = -\frac{d}{dy}\left(xyS F^{\frac{3}{2}}\right).$$

On a donc

$$\frac{d}{dx}(xP''\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(yQ''\sqrt{F}) = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}\left[x(P - P'')\sqrt{F}\right] + \frac{d}{dy}\left[y(Q - Q'')\sqrt{F}\right].$$

Les polynomes P et Q sont donc remplacés par $P - P''$ et $Q - Q''$ qui sont, comme nous allons le voir, de degré moindre. En effet, les termes de P'' et Q'', qui sont de degré $p - m$

en x et y sont P_1 et Q_1,

en x et $\frac{1}{y}$ sont P_2 et Q_2,

en $\frac{1}{x}$ et y sont P_3 et Q_3,

en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ sont P_4 et Q_4.

Le degré des polynomes P et Q peut donc toujours être abaissé si H est de la forme (23 *ter*), de sorte que H peut toujours être ramené à la forme (23 *bis*). C. Q. F. D.

Il suffit donc de chercher si H peut se mettre sous la forme (23 *bis*).

Combien y a-t-il de polynomes H de degré $q = p + m$?

Il y en a

$$q^2 + (q+1)^2 = (p+m)^2 + (p+m+1)^2.$$

Combien y a-t-il de polynomes P de degré p?

Il y en a

$$p^2 + (p+1)^2,$$

et autant de polynomes Q, de sorte qu'il y a

$$2p^2 + 2(p+1)^2$$

expressions de la forme (23 *bis*). Mais toutes ces expressions ne sont pas distinctes, parce qu'il peut y avoir des polynomes P et Q, tels que

$$\frac{d}{dx}(x\text{P}\sqrt{\text{F}}) + \frac{d}{dy}(y\text{Q}\sqrt{\text{F}}) = 0. \tag{26}$$

Cette équation exprime que

$$\int (y\text{Q}\sqrt{\text{F}}\,dx - x\text{P}\sqrt{\text{F}}\,dy)$$

est une intégrale de différentielle totale. Cette intégrale, d'après ce que nous avons vu, ne peut être transcendante; et, en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, on verrait qu'elle doit être de la forme

$$xy\text{S}\text{F}^{\frac{3}{2}},$$

S étant un polynome entier en $x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. On aura donc

$$\left\{\begin{aligned} \text{Q} &= \text{SF} + x\frac{d\text{S}}{dx}\text{F} + \frac{3}{2}x\frac{d\text{F}}{dx}\text{S}, \\ \text{P} &= -\text{SF} - y\frac{d\text{S}}{dy}\text{F} - \frac{3}{2}y\frac{d\text{F}}{dy}\text{S}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Ces équations montrent que S doit être de degré $p - m$. Si, en

effet, S était de degré

$$h > p - m,$$

il contiendrait un ensemble de termes homogènes de degré h en x et y que j'appellerais S_1 (et je définirais de même, comme plus haut, S_2, S_3, S_4). Les termes de degré $h + m$ devant disparaître dans le second membre de (27), on aurait

$$0 = S_1 F_1 + x \frac{dS_1}{dx} F_1 + \frac{3}{2} x \frac{dF_1}{dx} S_1,$$

$$0 = -S_1 F_1 - y \frac{dS_1}{dy} F_1 + \frac{3}{2} y \frac{dF_1}{dy} S_1,$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(xy S_1 F_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dy}\left(xy S_1 F_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0,$$

d'où $S_1 = 0$.

On démontrerait de même que S_2, S_3 et S_4 sont nuls.

Donc S est de degré $p - m$, et il y a autant de relations (26) que de polynomes de degré $p - m$, c'est-à-dire

$$(p - m)^2 + (p - m + 1)^2.$$

Combien y a-t-il alors de polynomes H distincts non susceptibles d'être mis sous la forme (23). Il y en a

$$(p + m)^2 + (p + m + 1)^2 - 2p^2 - 2(p + 1)^2$$
$$+ (p - m)^2 + (p - m + 1)^2,$$

c'est-à-dire $4m^2$.

Dans le cas de la fonction perturbatrice, on a

$$m = 2, \qquad 4m^2 = 16.$$

Ainsi *les coefficients du développement de la fonction perturbatrice suivant les cosinus et sinus des multiples des anomalies excentriques sont des fonctions transcendantes des éléments. Mais ces fonctions transcendantes dépendent au plus de* 16 *transcendantes distinctes.*

Cas des excentricités nulles.

Alors, nous l'avons vu, le polynome F contient des termes en

$$xy,\quad x,\quad y,\quad 1,\quad x^{-1},\quad y^{-1},\quad x^{-1}y,\quad xy^{-1},\quad x^{-1}y^{-1}.$$

J'entendrai désormais, sauf avis contraire, par polynome de degré p tout polynome où, dans chaque terme, l'exposant de x, non plus que celui de y, n'excède jamais p en valeur absolue.

En ce sens, F est un polynome de degré 1. Je généraliserai en supposant que F est un polynome de degré m.

Soit H un polynome de degré q; il s'agit de savoir s'il peut se mettre sous la forme (23). Je dirai encore que le polynome est de la forme (23 *bis*) si le degré p des polynomes P et Q (le mot *degré* est entendu au sens nouveau que je lui donne) est égal à $q-m$, et de la forme (23 *ter*) s'il est plus grand que $q-m$.

Je me propose encore d'établir que tout polynome de la forme (23 *ter*) est aussi de la forme (23 *bis*).

Adoptant des notations analogues à celles du paragraphe précédent, je désigne

par P_1 l'ensemble des termes de P de degré p par rapport à x,
P_2 » P » p » y,
P_3 » P » p » $\frac{1}{x}$,
P_4 » P » p » $\frac{1}{y}$;
par Q_1 » Q » p » x,
Q_2 » Q » p » y,
Q_3 » Q » p » $\frac{1}{x}$,
Q_4 » Q » p » $\frac{1}{y}$;

par F_1 l'ensemble des termes de F de degré m par rapport à x,

F_2	»	F	»	m	»	y,
F_3	»	F	»	m	»	$\frac{1}{x}$,
F_4	»	F	»	m	»	$\frac{1}{y}$.

Je désignerai toujours par P_{12} le terme commun à P_1 et à P_2, qui est alors un terme en $x^p y^p$, et je définirai de même $Q_{13}, \ldots, F_{12}, \ldots$.

Nous retrouverons alors l'équation (24) qui montre que

$$yQ_1\sqrt{F_1}\,dx - xP_1\sqrt{F_1}\,dy = dT_1$$

est une différentielle exacte. Si nous observons que par définition P_1, Q_1 et F_1 sont égaux à x^p ou à x^m multipliés par une fonction de y, nous voyons que T_1 doit être égal à

$$x^{p+1+\frac{m}{2}}$$

multiplié par une fonction de y, c'est-à-dire que

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right)T_1 = x\frac{dT_1}{dx} = xyQ_1\sqrt{F_1}.$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{dT_1}{dy}$, on trouve

$$-\left(p+1+\frac{m}{2}\right)P_1F_1 = y\frac{dQ_1}{dy}F_1 + Q_1F_1 + \frac{y}{2}Q_1\frac{dF_1}{dy},$$

ce qui montre que Q_1 est divisible par F_1 $\left(\text{si, comme nous le supposons, } F_1 \text{ est premier avec } y\frac{dF_1}{dy}\right)$.

Nous pourrons alors poser

$$T_1 = xyS_1F_1^{\frac{3}{2}},$$

S_1 étant égal à x^{p-m} multiplié par un polynome d'ordre $p-m$ en y et $\frac{1}{y}$. Nous trouverons de même

$$yQ_2\sqrt{F_2}\,dx - xP_2\sqrt{F_2}\,dy = dT_2,$$

et

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right)T_2 = -xyP_2\sqrt{F_2};$$

on démontrerait de la même façon que

$$T_2 = xyS_2F_2^{\frac{3}{2}},$$

S_2 étant égal à y^{p-m} multiplié par un polynome d'ordre $p-m$ en x et $\frac{1}{x}$. Mais S_1 et S_2 ont tous deux un terme en $x^{p-m}y^{p-m}$; j'appelle S_{12} celui de S_1 et S_{21} celui de S_2. Je dis que $S_{12} = S_{21}$.

En effet, nous avons

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right)S_1F_1 = Q_1, \qquad \left(p+1+\frac{m}{2}\right)S_2F_2 = -P_2,$$

d'où

$$\left(p+1+\frac{m}{2}\right)S_{12}F_{12} = Q_{12}, \qquad \left(p+1+\frac{m}{2}\right)S_{21}F_{12} = -P_{12}.$$

Ce qu'il faut donc démontrer, c'est que

$$P_{12} + Q_{12} = 0.$$

Mais si dans l'équation

$$\frac{d}{dx}(xP_1\sqrt{F_1}) + \frac{d}{dy}(yQ_1\sqrt{F_1}) = 0,$$

on conserve seulement les termes en $x^{p+m}y^{p+m}$, on trouve précisément

$$P_{12} + Q_{12} = 0.$$

On définirait de même S_3 et S_4, et l'on verrait comme plus haut que $S_{14} = S_{41}$, etc.

Il existe donc un polynome S d'ordre $p-m$ dont les termes de degré $p-m$ en x, en y, en $\frac{1}{x}$, en $\frac{1}{y}$, sont respectivement S_1, S_2, S_3 et S_4, de telle façon que

$$yQ_1\sqrt{F_1} = \frac{d}{dx}\left(xyS_1F_1^{\frac{3}{2}}\right), \qquad \ldots$$

Le reste du raisonnement se poursuivrait comme dans les paragraphes précédents et l'on verrait que tout polynome de la forme (23 *ter*) peut se ramener à la forme (23 *bis*).

Il suffit donc de rechercher si H peut être mis sous la forme (23 *bis*).

Or combien y a-t-il de polynomes H de degré $q = p + m$? Il y en a

$$(2q+1)^2 = (2p+2m+1)^2.$$

Il y a $(2p+1)^2$ polynomes P de degré p et autant de polynomes Q, et par conséquent

$$2(2p+1)^2$$

expressions (23). Combien entre ces expressions y a-t-il d'équations (26)?

Si

$$\int \left(yQ\sqrt{F}dx - xP\sqrt{F}dy\right)$$

est une intégrale de différentielle totale, cette intégrale ne peut être transcendante et doit être de la forme

$$xySF^{\frac{3}{2}},$$

S étant un polynome en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$.

Les équations (27) qui sont encore valables montreraient que S est de degré $p-m$; car si S était de degré $h > p-m$, en écrivant que les termes en x^{h+m} disparaissent du second membre de (27), on trouverait

$$\frac{d}{dx}\left(xyS_1F_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dy}\left(xyS_1F_1^{\frac{3}{2}}\right) = 0,$$

en appelant S_1 l'ensemble des termes de S en x^h. On aurait donc $S_1 = 0$, et l'on verrait de même que les termes de S en y^h, en x^{-h} et en y^{-h} doivent disparaître.

Il y a donc autant de relations (26) que de polynomes de degré $p - m$, c'est-à-dire

$$(2p - 2m + 1)^2.$$

Combien alors de polynomes H non réductibles à la forme (23)? Il y en a

$$(2p + 2m + 1)^2 - 2(2p + 1)^2 + (2p - 2m + 1)^2.$$

Cela fait $8m^2$.

Dans le cas de la fonction perturbatrice $m = 1$.

Il y a donc au plus huit transcendantes distinctes.

Influence de la symétrie.

Ce nombre peut encore être abaissé. Nous avons vu, en effet, que le polynome F ne change pas quand on change x en y, ni quand on change x et y en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. Nous ne nous servirons que de la première de ces deux symétries.

Ainsi F est un polynome symétrique en x et y.

Soit alors H un polynome symétrique en x et y.

Si nous avons

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}(xP\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(yQ\sqrt{F}),$$

je puis supposer que les polynomes P et Q se changent l'un dans l'autre quand on change x et y.

Si en effet il n'en était pas ainsi, en permutant x et y, on trouverait

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dy}\left[yP(y, x)\sqrt{F}\right] + \frac{d}{dx}\left[xQ(y, x)\sqrt{F}\right],$$

d'où

$$\frac{H}{\sqrt{F}} = \frac{d}{dx}\left[x\sqrt{F}\,\frac{P(x, y) + Q(y, x)}{2}\right] + \frac{d}{dy}\left[y\sqrt{F}\,\frac{Q(x, y) + P(y, x)}{2}\right],$$

et il est clair que les deux polynomes

$$\frac{P(x,y)+Q(y,x)}{2}, \qquad \frac{Q(x,y)+P(y,x)}{2}$$

(qui remplacent P et Q) se permutent quand on change x et y.

Pour chercher combien il nous restera de transcendantes distinctes, il suffit de chercher combien il y a de polynomes H *symétriques* non susceptibles d'être mis sous la forme (23).

D'après ce qui précède, il suffit de chercher combien il y en a qui ne peuvent se mettre sous la forme (23 *bis*), les polynomes P et Q se permutant quand on change x en y. C'est ce que j'appellerai mettre H sous la forme (23 *quater*).

Il y a

$$(2q+1)(q+1) = (2p+2m+1)(p+m+1)$$

polynomes H symétriques de degré q.

Il y a $(2p+1)^2$ polynomes $P(x,y)$ de degré p. A chacun d'eux correspond le polynome

$$Q(x,y) = P(y,x).$$

Il y a donc $(2p+1)^2$ expressions (23 *quater*); mais toutes ne sont pas distinctes, car on peut avoir entre elles des relations de la forme

$$(26\,bis) \qquad \frac{d}{dx}(xP\sqrt{F}) + \frac{d}{dy}(yQ\sqrt{F}) = 0,$$

d'où

$$\sqrt{F}(yQ\,dx - xP\,dy) = d(SF^{\frac{3}{2}}).$$

Si l'on change x en y, le premier membre change de signe; donc $SF^{\frac{3}{2}}$ change de signe, et comme F ne change pas, S change de signe.

Il y aura donc autant de relations (26 *bis*) que de polynomes S de degré $p-m$ qui changent de signe quand on change x en y, c'est-à-dire

$$(2p+2m+1)(p-m).$$

Le nombre des polynomes H symétriques non susceptibles d'être mis sous la forme (23) est donc

$$(2p+2m+1)(p+m+1)-(2p+1)^2+(2p-2m+1)(p-m),$$

c'est-à-dire

$$4m^2+2m.$$

Ici $m=1$; donc $4m^2+2m=6$.

Ainsi, *si les deux orbites sont circulaires* et les deux excentricités nulles et si l'on développe la fonction perturbatrice suivant les sinus et cosinus des multiples des anomalies excentriques qui se confondent alors avec les anomalies moyennes, *les coefficients* sont des fonctions transcendantes des éléments; mais ils *dépendent au plus de six transcendantes distinctes.*

Tenons compte maintenant de la double symétrie du polynome F; il ne change pas, ni quand on permute x et y, ni quand on change x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$.

Pour que ces deux changements n'altèrent pas l'intégrale double

$$\int\int \frac{\mathrm{H}\,dx\,dy}{\sqrt{\mathrm{F}}},$$

il faut et il suffit qu'ils n'altèrent pas non plus le polynome

$$\mathrm{H}'=xy\mathrm{H}.$$

Si H' est un polynome présentant cette double symétrie, et si H peut se mettre sous la forme (23), nous aurons

$$(28)\qquad \mathrm{H}'=x\left(\mathrm{F}\frac{d\mathrm{P}'}{dx}+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{P}'\right)+y\left(\mathrm{F}\frac{d\mathrm{Q}'}{dy}+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{Q}'\right)$$

en posant

$$\mathrm{P}'=xy\mathrm{P},\qquad \mathrm{Q}'=xy\mathrm{Q}.$$

Si H' a cette double symétrie, on pourra toujours supposer que P' se

change en $-P'$, et que Q' se change en $-Q'$ quand x et y se changent en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, et, d'autre part, que P' se change en Q' et Q' en P', quand on permute x et y.

Cela se démontrerait comme plus haut.

Le polynome F est de degré m (je veux dire par là, comme plus haut, qu'il est de degré m par rapport à x et $\frac{1}{x}$, d'une part; par rapport à y et $\frac{1}{y}$, d'autre part).

Si P' et Q' sont d'ordre p, H' sera d'ordre $q = p + m$.

Il y a

$$(q+1)^2 = (p+m+1)^2$$

polynomes H' de degré q présentant cette symétrie.

Il y aura, d'autre part,

$$2p^2 + 2p$$

polynomes P' de degré q se changeant en $-P'$ quand x et y se changent en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. A chaque polynome P' correspondra un polynome

$$Q'(x, y) = P(y, x).$$

Il y aura donc $2p^2 + 2p$ expressions (28). Il reste à savoir s'il n'y a pas entre elles des relations de la forme

$$\frac{d}{dx}\frac{P'\sqrt{F}}{y} + \frac{d}{dy}\frac{Q'\sqrt{F}}{x} = 0$$

ou

$$Q'\sqrt{F}\frac{dx}{x} - P'\sqrt{F}\frac{dy}{y} = d(S'F^{\frac{3}{2}}),$$

d'où

$$Q' = x\left(F\frac{dS'}{dx} + \frac{3}{2}\frac{dF}{dx}S'\right),$$

$$P' = -y\left(F\frac{dS'}{dy} + \frac{3}{2}\frac{dF}{dy}S'\right).$$

On voit que S' sera un polynome d'ordre $p - m$; ce polynome change

de signe quand on permute x et y; il ne change pas quand on change x en $\frac{1}{x}$ et y en $\left(\frac{1}{y}\right)$.

Il y aura donc autant de relations analogues aux relations (26) qu'il y aura de polynomes S′ de degré $p - m$ présentant cette symétrie, c'est-à-dire

$$(p - m)^2.$$

Le nombre de nos transcendantes distinctes est alors, d'après un calcul que nous avons fait bien des fois,

$$(p + m + 1)^2 - 2p^2 - 2p + (p - m)^2,$$

c'est-à-dire

$$2m^2 + 2m + 1.$$

Si $m = 1$, on a

$$2m^2 + 2m + 1 = 5.$$

Donc *les coefficients du développement de la fonction perturbatrice dépendent au plus de cinq transcendantes distinctes, quand les deux excentricités sont nulles.*

Relation avec la théorie des périodes des intégrales doubles.

Il n'est peut-être pas inutile de dire comment j'ai été conduit à ces résultats.

Les coefficients cherchés sont des périodes de l'intégrale double

$$\int\int \frac{x^a y^b}{\sqrt{F}} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

Soit A_{ab} le coefficient en question; envisageons la fonction

$$\Phi(t, u) = \sum A_{ab} t^a u^b = \int\int \frac{dx\,dy}{xy\sqrt{F}(1 - tx)(1 - uy)}$$

et étudions ses variations quand on fait varier t et u et, par conséquent, sa nature analytique.

Quand t décrira un contour fermé, les diverses périodes de l'intégrale double s'échangeront entre elles. Les nouvelles déterminations de $\Phi(t, u)$ seront donc des fonctions linéaires des anciennes. En d'autres termes, la fonction $\Phi(t, u)$ considérée comme fonction de t satisfera à une équation différentielle linéaire dont les coefficients seront des fonctions uniformes. L'ordre de cette équation sera au plus N, si N est le nombre des périodes de l'intégrale double.

De plus, la fonction sous le signe $\int\int$ étant algébrique, tout point singulier de $\Phi(t, u)$ sera un simple point singulier algébrique ou logarithmique. Donc les coefficients de l'équation linéaire seront des fonctions rationnelles.

On arriverait au même résultat en considérant $\Phi(t, u)$ comme fonction de u; ou bien en supposant entre t et u une relation algébrique quelconque.

En résumé, la fonction $\Phi(t, u)$ et ses dérivées par rapport à t et à u satisfont à deux ou plusieurs équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles en t et en u.

On peut même, en chassant les dénominateurs, supposer que les coefficients des équations linéaires sont des polynomes entiers en t et en u.

Or, on sait que, si une fonction satisfait à une équation linéaire et si l'on connaît les premiers coefficients, tous les autres peuvent s'en déduire.

Nous devions donc prévoir que tous les coefficients dépendraient d'un nombre fini de transcendantes distinctes.

M. Féraud a présenté dernièrement à la Faculté des Sciences de Paris une Thèse où il se proposait d'étudier la valeur approchée des termes de degré élevé du développement en modifiant la méthode que j'ai exposée dans mon livre sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

Il a introduit une fonction qui présente de grandes analogies avec celle que je viens d'appeler $\Phi(t, u)$; il montra en même temps le lien qu'il y avait entre l'étude de cette fonction et celle des périodes des intégrales doubles.

Je fus ainsi conduit à penser à l'analogie étroite qu'il devait y

avoir entre la théorie des périodes des intégrales doubles et celle des périodes des intégrales simples; je pensai en particulier au Mémoire de M. Fuchs, du Tome 83 du *Journal de Crelle*, au sujet de l'équation linéaire à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale elliptique. Il est évident que l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-tx)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

doit satisfaire à une équation analogue et que l'étude de cette équation conduirait immédiatement aux relations de récurrence bien connues entre les coefficients b de Laplace.

Mais la théorie de ces coefficients de Laplace n'est pas autre chose que celle du développement de la fonction perturbatrice, quand les deux excentricités et l'inclinaison sont nulles.

On peut donc prévoir que le même procédé, appliqué aux intégrales doubles, donnera des relations de récurrence analogues entre les coefficients du développement quand l'inclinaison n'est pas nulle.

On remarquera également que la théorie qui remplit les pages précédentes est une généralisation toute naturelle de la réduction des intégrales hyperelliptiques, réduction qui aboutit, comme on sait, à la distinction des intégrales de première, deuxième et troisième espèce.

On peut donc entrevoir une relation entre le nombre des périodes et celui des intégrales de première et de deuxième espèce, ainsi que cela a lieu pour les intégrales hyperelliptiques et abéliennes.

Ce n'est pas tout; reprenons le coéfficient du développement qui est représenté par l'intégrale

$$\int\int \frac{x^a y^b}{\sqrt{F}} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

Cette intégrale peut être regardée comme une fonction des coefficients de F (et par conséquent des éléments du mouvement elliptique). Mais quand ces coefficients varieront et après avoir décrit des contours fermés reviendront à leurs valeurs primitives, les périodes de l'intégrale double ne feront que s'échanger entre elles. C'est le même raisonnement que plus haut et le résultat est le même; notre intégrale,

considérée comme fonction de l'un des éléments elliptiques, satisfera à une équation linéaire à coefficients rationnels.

Tout ce que nous venons de dire s'applique aux développements procédant suivant les anomalies excentriques. Passons au cas des développements procédant suivant les anomalies moyennes.

Un coefficient quelconque sera donné par l'intégrale

$$(1)\qquad \mathrm{J} = \int\!\!\int \frac{x^a y^b}{\sqrt{\mathrm{F}}} e^{\frac{a\varepsilon}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{b\varepsilon}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{2x^2}\right)\left(\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{1}{y} + \frac{\varepsilon'}{2y^2}\right) dx\, dy;$$

e désigne la base des logarithmes népériens, ε et ε' les deux excentricités. C'est la présence du facteur transcendant

$$e^{\frac{a\varepsilon}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{b\varepsilon'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)}$$

qui empêche que les résultats précédents soient immédiatement applicables. C'est ce que j'appellerai le *facteur exponentiel.*

Nous voyons que les deux entiers a et b figurent, d'une part, dans le facteur $x^a y^b$ et, d'autre part, dans le facteur exponentiel; d'autre part, les deux excentricités ε et ε' figurent dans le facteur exponentiel et en dehors de ce facteur.

Si nous posons

$$\frac{a\varepsilon}{2} = \tau, \qquad \frac{b\varepsilon'}{2} = \tau',$$

le facteur exponentiel devient

$$e^{\tau x - \frac{\tau}{x} + \tau' y - \frac{\tau'}{y}},$$

et si nous considérons τ, τ', ε, ε', a, b comme des variables indépendantes, ce qui ne fait qu'étendre la généralité, τ et τ' n'entrent que dans le facteur exponentiel, et, au contraire, ε, ε', a et b ne figurent qu'en dehors de ce facteur.

Cette convention simplifiera l'énoncé des résultats.

On sait que si l'on pose

$$u = \int e^{zx} f(x)\, dx,$$

et si $f(x)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\sum \mathrm{A} x^m \frac{d^k f}{dx^k} = 0,$$

la fonction u satisfera à l'équation conjuguée

$$\sum (-1)^m \mathrm{A} \frac{d^m}{dz^m} (z^k u) = 0,$$

pourvu que le chemin d'intégration soit convenablement choisi, et en particulier si l'intégrale définie u est une période de l'intégrale indéfinie.

Soit de même V une période de l'intégrale double

$$\mathrm{V} = \int\int e^{zx+uy} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si la fonction $f(x, y)$ satisfait à une ou plusieurs équations linéaires de la forme

$$(2) \qquad \sum \mathrm{A} x^\alpha y^\beta \frac{d^{m+n} f}{dx^m dy^n} = 0,$$

la période V satisfera aux équations correspondantes

$$(3) \qquad \sum \mathrm{A} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{d^{\alpha+\beta}(\mathrm{V} z^m u^n)}{dz^\alpha du^\beta} = 0.$$

Or, si f est une fonction algébrique quelconque de x et de y, f satisfera à deux équations linéaires à coefficients rationnels en x et y. Donc V satisfera de même à deux équations linéaires à coefficients rationnels en z et u.

Cela peut d'abord s'appliquer à la recherche des relations de récurrence entre les coefficients du développement de $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}}}$, recherche qui nous a occupés dans les paragraphes précédents.

En effet, la fonction $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}}}$ étant algébrique, l'intégrale

$$\mathrm{V} = \int\int e^{zx+uy} \frac{dx\, dy}{\sqrt{\mathrm{F}}}$$

satisfera à deux équations analogues à (3). De ces équations il est aisé de déduire des relations de récurrence entre les coefficients du développement de V suivant les puissances de $z^a u^b$. Or le coefficient de

$$\frac{z^a u^b}{a!\,b!}$$

est précisément l'intégrale

$$\int\int \frac{x^a y^b\,dx\,dy}{\sqrt{F}},$$

c'est-à-dire l'un des coefficients du développement cherché de $\frac{1}{\sqrt{F}}$.

D'autre part, posons

$$x - \frac{1}{x} = \xi, \qquad y - \frac{1}{y} = \eta;$$

l'intégrale (1) pourra s'écrire

$$J = \int\int e^{\tau\xi + \tau'\eta}\Phi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta;$$

$\Phi(\xi, \eta)$ est une fonction algébrique de ξ et de η. Donc J, considéré comme fonction de τ et de τ', satisfait à deux équations de la forme (3).

Mais on peut encore mettre l'intégrale J sous une autre forme où le même résultat apparaîtra d'une façon non moins évidente. L'intégrale J peut être regardée comme un cas particulier de la suivante

$$\int\int e^{\tau x - \frac{\tau_1}{x} + \tau' y - \frac{\tau'_1}{y}}\varphi(x, y)\frac{dx\,dy}{\sqrt{F}},$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et de y et où τ, τ_1, τ', τ'_1 sont regardées comme des variables indépendantes entre elles, et indépendantes également, d'après la convention faite plus haut, de ε et ε' qui continuent à figurer dans φ et dans F.

On retrouve l'intégrale J en faisant

$$\tau = \tau_1, \qquad \tau' = \tau'_1.$$

Nous voyons ensuite qu'à un facteur constant près cette intégrale est une période de l'intégrale quadruple

$$\int e^{\tau x+\tau_1 x_1+\tau' y+\tau'_1 y_1} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1}{\sqrt{\mathrm{F}}\left(x_1+\frac{1}{x}\right)\left(y_1+\frac{1}{y}\right)},$$

ou encore une période de l'intégrale quintuple

$$\int e^{\tau x+\tau_1 x_1+\tau' y+\tau_1 y_1} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1\, dz}{(z^2\mathrm{F}-1)\left(x_1+\frac{1}{x}\right)\left(y_1+\frac{1}{y}\right)}.$$

Je regarderai cette intégrale comme un cas particulier de la suivante

$$(4)\qquad \int e^{\tau x+\tau_1 x_1+\tau' y+\tau'_1 y_1+uz} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1\, dz}{(z^2\mathrm{F}-1)\left(x_1+\frac{1}{x}\right)\left(y_1+\frac{1}{y}\right)}.$$

L'intégrale se trouve ainsi mise sous la forme convenable. Sous le signe $\int$ nous avons le produit d'un facteur exponentiel et d'une fonction algébrique (et même rationnelle) des cinq variables x, y, x_1, y_1, z.

Donc l'intégrale considérée comme fonction de τ, τ_1, τ', τ'_1 et u satisfera à cinq équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

Toutes les dérivées partielles des différents ordres de cette intégrale par rapport à τ, τ_1, τ', τ'_1 et u peuvent s'exprimer linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles; et cela par le moyen de ces cinq équations différentielles et de celles qu'on en déduit par différentiation (je reviendrai tout à l'heure sur ce point).

Donc, si nous considérons les intégrales

$$(5)\qquad \int e^{\mathrm{H}} \frac{\varphi\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1\, dz}{(z^2\mathrm{F}-1)\left(x_1+\frac{1}{x}\right)\left(y_1+\frac{1}{y}\right)} x^a y^b x_1^{a_1} y_1^{b_1} z^c,$$

où $\mathrm{H}=\tau x+\tau_1 x_1+\tau' y+\tau'_1 y_1+uz$ et où a, b, c, a_1, b_1 sont des

entiers, toutes ces intégrales peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Reprenons maintenant l'intégrale (4). Nous venons de la considérer comme fonction des τ et de u; mais nous regarderons maintenant u et les τ comme des constantes et nous ferons varier les éléments elliptiques (et entre autres ε et ε') dont dépend la partie rationnelle de la fonction sous le signe $\int$.

La dérivée de J par rapport à l'un de ces éléments, ou une dérivée partielle d'ordre quelconque de J par rapport à ces divers éléments, sera de la forme

$$(6) \qquad \int\int e^{\mathrm{H}} \frac{dx\,dy}{(\sqrt{\mathrm{F}})^k} \mathrm{P},$$

où e^{H} représente le facteur exponentiel et où P est un polynome en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

De même que l'intégrale (1) a été ramenée à l'intégrale (4), de même cette intégrale (6) se ramènerait à une combinaison d'intégrales de la forme (5).

Donc les diverses dérivées partielles de J peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Un dernier point que j'avais réservé reste à examiner. Soit l'intégrale double

$$(7) \qquad \mathrm{J} = \int\int\int e^{tx+uy+vz} \mathrm{R}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

où R est rationnel en x, y et z; je dis que les dérivées partielles de J par rapport à t, à u et à v peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

J'ai énoncé plus haut cette propriété, sans la démontrer, en ce qui concerne l'intégrale (4); établie pour l'intégrale triple (7), elle s'étendrait évidemment à l'intégrale quintuple (4). Soit

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},$$

P et Q étant des polynomes.

R satisfera aux équations différentielles

$$PQ\frac{dR}{dx} = R\left(Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}\right),$$

$$PQ\frac{dR}{dy} = R\left(Q\frac{dP}{dy} - P\frac{dQ}{dy}\right),$$

$$\left(Q\frac{dP}{dy} - P\frac{dQ}{dy}\right)\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dy}\left(Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}\right),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dR}{dx} & \frac{dR}{dy} & \frac{dR}{dz} \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{dP}{dz} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} & \frac{dQ}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons à former les équations correspondantes auxquelles satisfait J et qui se déduisent des premières comme l'équation (3) se déduit de l'équation (2).

A chaque polynome en x, y, z correspondra un opérateur.

Au polynome

$$\sum A x^m y^n z^p$$

correspond l'opérateur

$$\sum A(-1)^{m+n+p}\frac{d^{m+n+p}}{dt^m du^n dv^p}.$$

Soit

$$\Delta,\quad \Delta_1,\quad \Delta_2,\quad D_1,\quad D_2,\quad D_3$$

les opérateurs qui correspondent aux polynomes

$$PQ,\qquad S_1 = Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx},\qquad S_2 = Q\frac{dP}{dy} - P\frac{dQ}{dy},$$

$$T_1 = \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dz} - \frac{dP}{dz}\frac{dQ}{dy},\qquad T_2 = \frac{dP}{dz}\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dz},$$

$$T_3 = \frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}.$$

Alors les équations auxquelles satisfait J s'écriront

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta(tJ) = \Delta_1 J, \\ \Delta(uJ) = \Delta_2 J, \\ \Delta_1(uJ) = \Delta_2(tJ), \\ D_1(tJ) + D_2(uJ) + D_3(vJ) = 0. \end{cases}$$

Pour démontrer que toutes les dérivées de J d'ordre suffisamment élevé peuvent s'exprimer à l'aide des dérivées d'ordre moindre, il suffira de montrer qu'une combinaison linéaire quelconque des dérivées d'ordre M peut être regardée comme obtenue de la façon suivante.

Parmi les équations que l'on peut déduire des équations (8), par différentiation, distinguons celles qui sont d'ordre M.

Soient

$$H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad H_K = 0$$

ces équations. Soient H'_1, H'_2, ..., H'_K les termes de H_1, H_2, ..., H_K qui contiennent des dérivées d'ordre M.

Je dis que toute combinaison linéaire des dérivées d'ordre M de la fonction J pourra se mettre sous la forme

$$\beta_1 H'_1 + \beta_2 H'_2 + \ldots + \beta_K H'_K,$$

les β étant des fonctions de t, u, v.

Les termes de l'ordre le plus élevé des équations (8) sont

$$t\Delta' J, \quad u\Delta' J, \quad u\Delta'_1 J - t\Delta'_2 J,$$
$$tD'_1 J + uD'_2 J + vD'_3 J,$$

où Δ', Δ'_1, Δ'_2, D'_1, D'_2, D'_3 représentent les opérateurs obtenus en conservant les dérivées de l'ordre le plus élevé dans les opérateurs Δ, Δ_1, ...; ils correspondent respectivement aux polynomes $P'Q'$, S'_1, S'_2, T'_1, T'_2, T'_3 obtenus en conservant dans les polynomes PQ, S_1, S_2, T_1, T_2, T_3 les termes du degré le plus élevé.

Dans une équation d'ordre M obtenue en différentiant et combinant

les équations (8), les termes d'ordre M seront de la forme

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\beta_1 t\square_1\Delta' J + \beta_2(u\square_2\Delta'_1 J - t\square_2\Delta'_2 J) \\ &\quad + \beta_3(t\square_3 D'_1 J + u\square_3 D'_2 J + v\square_3 D'_3 J), \end{aligned} \right.$$

où β_1, β_2, β_3 sont des fonctions, $\square_1$, $\square_2$, $\square_3$ des opérateurs quelconques.

Ce qu'il s'agit de démontrer, c'est que toute combinaison des dérivées d'ordre M peut se mettre sous la forme (9), ou, ce qui revient au même, que tout polynome homogène d'ordre M en x, y et z peut se mettre sous la forme

$$\beta_1 tP\,Q\,V_1 + \beta_2 V_2(uS'_1 - tS'_2) + \beta_3 V_3(tT'_1 + uT'_2 + vT'_3),$$

où V_1, V_2, V_3 sont des polynomes arbitraires correspondant aux opérateurs $\square_1$, $\square_2$, $\square_3$.

Or, pour cela, il suffit que les trois polynomes

$$P'Q', \qquad uS'_1 - tS'_2, \qquad tT'_1 + uT'_2 + vT'_3$$

ne puissent s'annuler à la fois.

C'est justement ce qui a lieu quand on attribue des valeurs quelconques aux trois indéterminées t, u et v et quand les polynomes P et Q sont les plus généraux de leur degré.

Le théorème démontré quand les polynomes P et Q sont les plus généraux de leur degré sera vrai (et pourrait se démontrer par passage à la limite) pour des polynomes quelconques.

Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs;

PAR M. ED. MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

I.

Soit S un groupe symétrique ou alterné de n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 4)$. On sait [1] que le groupe G_α formé par les substitutions que S opère entre les C_n^α combinaisons α à α des n éléments $\left(1 < \alpha < \frac{n}{2}\right)$ est primitif.

Soit C un sous-groupe de S, de degré n, k fois transitif; on sait [2], et l'on voit de suite, que C opère entre ces C_n^α combinaisons un groupe Γ_α de substitutions, transitif si $k \geqq \alpha$, Γ_α étant un sous-groupe de G_α. On peut se demander si Γ_α est primitif.

Soit Δ_α le sous-groupe des substitutions de Γ_α laissant immobile la combinaison $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$, D le sous-groupe correspondant de C; D est formé des substitutions de C qui permutent exclusivement entre elles les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$. C étant supposé k fois transitif, avec $k \geqq \alpha$, D opère entre ces α lettres les substitutions du groupe symétrique;

[1] *Journal de Mathématiques*, p. 16; 1895.

[2] Voir *Bull. Soc. math.*, 1896, notre *Note sur les groupes de substitutions*.

de plus les sous-groupes de C et D, formés des substitutions de C et D respectivement laissant immobiles ces α lettres, coïncident et forment un groupe E, $k-\alpha$ fois transitif, par suite transitif si $k \geqq \alpha+1$, et primitif si $k \geqq \alpha+2$. Γ_α n'est qu'une fois transitif, en général, comme G_α qui le contient [1].

Nous savons [2] que Γ_α sera primitif à la condition nécessaire et suffisante que Δ_α soit maximum dans Γ_α, ou D maximum dans C. Il suffit donc de voir si le groupe dérivé de D et d'une substitution quelconque U de C, non contenue dans C, coïncide avec C.

La substitution U, n'appartenant pas à D, permute une des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ avec une des $n-\alpha$ autres lettres, et le groupe F, dérivé de D et de U, sera transitif entre les n lettres, si D l'est entre les $n-\alpha$ lettres $a_{\alpha+1}, \ldots, a_n$, c'est-à-dire si $k \geqq \alpha+1$, ce que nous supposerons.

Si F n'est pas primitif, il admettra une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité i à i avec $1 < i \leqq \frac{n}{2}$, et i divise n. Considérons dans F le sous-groupe L des substitutions de F laissant a_j immobile : L permutera exclusivement entre elles les lettres du système de non-primitivité auquel appartient a_j. Si l'on prend $j \leqq \alpha$, L contiendra le sous-groupe des substitutions de D laissant a_j immobile, lequel opère entre les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ autres que a_j les substitutions du groupe symétrique de $\alpha-1$ éléments, et, par suite, le groupe E. Donc L permute transitivement ces $\alpha-1$ lettres (sauf si $\alpha=2$, mais les raisonnements qui suivent restent applicables) : si une seule d'entre elles appartient au même système de non-primitivité que a_j, elles lui appartiennent toutes, et $i \geqq \alpha$. Si une des lettres déplacées par E appartient au même système de non-primitivité que a_j, avec $j \leqq \alpha$, toutes les lettres de E, qui est ici transitif, lui appartiennent, et il faudrait $n-\alpha < i \leqq \frac{n}{2}$, résultat absurde, en supposant ici $\alpha < \frac{n}{2}$ [3]. On en

(1) *Journal de Mathématiques*, p. 23; 1896.

(2) W. Dyck, *Math. Ann.*, t. XX et XXII, et notre *Thèse de Doctorat*, p. 18.

(3) Il n'y a pas d'intérêt à supposer $\alpha > \frac{n}{2}$, car à toute combinaison des n lettres α à α en correspond une autre formée des $n-\alpha$ autres lettres, et les

conclut, puisque $i \geqq 2$, que les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ forment un système, et que $i = \alpha$.

Les lettres de E formeront alors un certain nombre de systèmes, et il faudra : 1° que $i = \alpha$ divise n; 2° que E admette une répartition de ses lettres α à α, ce qui est impossible si E est primitif. Il en résulte :

F *est primitif :* 1° *quand* $k > \alpha$ *et que* α *ne divise pas* n; 2° *quand* $k > \alpha$ *et que* E *est primitif ou n'admet pas une répartition de ses lettres* α *à* α; 3° *par suite quand* $k \geqq \alpha + 2$.

Supposons F primitif : E est de degré $n - \alpha$ et transitif entre $n - \alpha$ lettres.

Si E est primitif entre ces lettres, on sait ([1]) que F est au moins $\alpha + 1$ fois transitif entre n lettres : le sous-groupe des substitutions de F laissant immobiles $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ est E, en sorte que F et C sont de même ordre, ce qui entraîne $F = C$; dans ce cas D est maximum dans C, et Γ_α est primitif : il en est ainsi en particulier quand E est deux fois transitif entre ses $n - \alpha$ lettres, c'est-à-dire quand $k \geqq \alpha + 2$.

Si E n'est pas primitif, et $k = \alpha + 1$, on sait ([2]) que F renferme un groupe F_1 deux fois transitif de degré $p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu + 1 = P$, avec

$$n - \alpha = p_1 > p_2 > \ldots > p_\mu > 1,$$

$p_1 = n - \alpha$ étant un multiple de p_2, p_2 un multiple de p_3, ..., et F_1 renferme des sous-groupes transitifs de degré $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \ldots, p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu + 1 = P$, dont chacun est contenu dans le suivant, et $P < n$, d'où

$$(1) \qquad \alpha \geqq p_2 + p_3 + \ldots + p_\mu + 1, \qquad \text{et} \qquad p_2 \geqq \alpha - 1.$$

---

deux groupes Γ_α et $\Gamma_{n-\alpha}$ correspondants coïncident à la notation près. Si $\alpha = \frac{n}{2}$, G_α n'est pas primitif, et Γ_α non plus : d'ailleurs C ne pourrait en général être $\frac{n}{2}$ fois transitif sans contenir le groupe alterné.

([1]) *Journal de Mathématiques*, p. 383; 1871.

([2]) *Journal de Mathématiques*, p. 384-389; 1871, ou p. 20; 1895.

On en conclut d'ailleurs que F est au moins $n - P + 2$ fois transitif.

Si $\mu = 1$, F étant $\alpha + 1$ fois transitif coïncide avec C, et Γ_α est primitif. On n'a d'ailleurs $\mu > 1$ que si $p_2 \geqq 2$: Γ_α ne peut donc être imprimitif que si p_2 est égal à un des nombres 2, 3, ..., ou $\alpha - 1$, et, *a fortiori*, que si $n - \alpha$ possède un diviseur > 1 égal à un de ces nombres, c'est-à-dire n'est pas premier à $(\alpha - 1)!$ Donc :

Si F *est primitif, il coïncide avec* C : 1° *quand* $k > \alpha + 1$; 2° *quand* $k = \alpha + 1$, *si* $n - \alpha$ *est premier à* $(\alpha - 1)!$.

Rapprochant ce résultat du résultat trouvé précédemment, on conclut :

Théorème I. — *Soit* C *un groupe* k *fois transitif entre* n *lettres,* Γ_α *l'isomorphe holoédrique de* C *formé par les substitutions que* C *opère entre les combinaisons* α *à* α *de ses lettres, avec* $\alpha < k$. Γ_α *sera primitif :*

1° *Quand* $k > \alpha + 1$;

2° *Quand* $k = \alpha + 1$, *et que l'on a à la fois* $n - \alpha$ *premier à* $(\alpha - 1)!$ *et* $\not\equiv 0 \pmod{\alpha}$.

Par exemple, si $\alpha = 2$, Γ_2 sera primitif si C est quatre fois transitif, ou s'il ne l'est que trois fois, mais que n est impair; si $\alpha = 3$, Γ_3 sera primitif si C est cinq fois transitif, ou s'il ne l'est que quatre fois, mais que $n - 3$ est impair et premier à 3, c'est-à-dire n de la forme $6h + 2$ ou $6h + 4$; si α est quelconque, et si $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_z$ sont les diviseurs premiers de $\alpha!$, Γ_α sera primitif si $k \geqq \alpha + 2$, ou si $k = \alpha + 1$ et $n - \alpha = l\varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_z + m$, l étant un entier quelconque, et m un entier, positif ou négatif, premier à $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_z$.

II. — Applications.

Premier cas. — C *est un groupe symétrique ou alterné.*

C est alors au moins $n - 2$ fois transitif, et l'on peut prendre $k = n - 2$; si $\alpha < \frac{n}{2}$, on a, en général, $n - 2 \geqq \alpha + 2$, sauf pour de

petites valeurs de n; on retrouve ainsi les isomorphes holoédriques et primitifs de la deuxième catégorie ([1]) des groupes symétriques ou alternés.

Deuxième cas. — *C est un des groupes cinq fois transitifs de Mathieu* ([2]).

On a $n = 12$ ou $n = 24$; le théorème I montre de suite que les groupes Γ_2 et Γ_3 correspondants sont primitifs.

C contient ici un groupe C′ quatre fois transitif formé des substitutions de C qui laissent une même lettre immobile, de degré 11 ou 23, et pour lequel le groupe Γ'_2, analogue à Γ_2, est primitif.

Troisième cas. — *C est un groupe linéaire fractionnaire.*

Nous allons établir à cet égard le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit C un groupe linéaire fractionnaire d'ordre ε trois fois transitif dérivé des substitutions*

$$V = \left| z; \frac{az + \alpha}{bz + \beta} \right| \quad (\text{mod. } p),$$

où p est premier, et où a, α, b, β, z sont des entiers complexes formés avec une racine ζ d'une congruence irréductible de degré m, c'est-à-dire de la forme

$$d_1\zeta^{m-1} + d_2\zeta^{m-2} + \ldots + d_m \quad (\text{mod. } p).$$

où $d_1, \ldots d_m$ sont entiers (mod. p). *Le groupe Γ_2 des substitutions opérées par C entre les combinaisons 2 à 2 de ses $p^m + 1$ lettres, est un groupe primitif d'ordre ε, de degré $\frac{(p^m+1)p^m}{2}$ (quand $p^m > 5$), et de classe $\frac{(p^m-1)(p^m+1)}{2}$ si p impair, et 2^{2m-1} si $p = 2$.*

([1]) *Journal de Mathématiques*, p. 5 à 34; 1895.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 1861 et 1873.

Je dis d'abord que Γ_2 est primitif.

On sait que V sera une substitution à la condition nécessaire et suffisante que $a\beta - b\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$. C est trois fois transitif entre $p^m + 1$ lettres représentées par p^m indices incongrus (mod. p) et par ∞.

Ici $n - \alpha = p^m - 1$ n'est premier à 2 que si $p = 2$. Le théorème I montre donc que Γ_2 est primitif quand $p = 2$, mais non quand p est impair.

Dans ce dernier cas, supposons Γ_2 non primitif : si l'on prend $a_1 = 0$, $a_2 = \infty$, le groupe E est formé des puissances de la substitution

$$X = |z, a'z| \qquad (\text{mod. } p),$$

où a' est une racine primitive de la congruence $x^{p^m-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Le groupe D est dérivé de E et de la substitution

$$Y = \left| z, \frac{1}{z} \right| \pmod{p},$$

car C ne contient pas de substitutions permutant exclusivement entre eux 0 et ∞ autres que celles dérivées de X et de Y. E étant transitif entre $n - 2$ lettres, le groupe F, dérivé de D et d'une substitution quelconque U de C non contenue dans D, est transitif entre n lettres. Si F est primitif quel que soit U, E étant transitif, on a ici, d'après (1), $\mu = 1$; F coïncide avec C et Γ_2 est primitif. Supposons donc F non primitif pour une valeur de U convenablement choisie : F admet une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité de 2 lettres, d'après ce qu'on a vu, et 0, ∞ forment un système. Quant aux autres systèmes, ils seront formés chacun des lettres d'un cycle de la substitution $|z, -z| \pmod{p}$; car E étant transitif entre les $n - 2$ lettres, autres que 0 et ∞ qu'il ne déplace pas, est transitif entre les $\frac{n-2}{2}$ systèmes qui les contiennent. E, étant formé des puissances de X, opère entre ces $\frac{n-2}{2}$ systèmes une substitution circulaire d'ordre $\frac{n-2}{2}$, et $X^{\frac{n-2}{2}} = |z, -z| \pmod{p}$ laisse tous ces systèmes immobiles. F ne peut donc être imprimitif que s'il existe une substitution U de C, non contenue dans D, et qui admette la répartition 0, ∞; i, $-i$,

où i prend toutes les valeurs $\not\equiv 0$ et incongrues entre elles (mod p). Supposons qu'il en soit ainsi.

U n'est pas contenue dans D, c'est-à-dire n'est pas d'une des formes X^μ ou $YX^\mu = \left| z, \frac{a'^\mu}{z} \right|$ (mod p).

Soit

$$U = \left| z; \frac{a_1 z + \alpha_1}{b_1 z + \beta_1} \right| \pmod{p}:$$

U ne peut permuter entre eux 0 et ∞; il remplace 0 par i, par exemple, et ∞ par $-i$, c'est-à-dire que

$$\alpha_1 \equiv \beta_1 i, \qquad a_1 \equiv -b_1 i,$$

$$U = \left| z, i\frac{-b_1 z + \beta_1}{b_1 z + \beta_1} \right| \pmod{p}.$$

De plus, si U remplace j par h, elle remplace $-j$ par $-h$ (en supposant j et h différents de 0 et ∞), et

$$i\frac{-b_1 j + \beta_1}{b_1 j + \beta_1} \equiv h, \qquad i\frac{b_1 j + \beta_1}{-b_1 j + \beta_1} \equiv -h,$$

d'où

$$b_1^2 j^2 + \beta_1^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cette congruence ne pouvant être satisfaite que pour deux valeurs de j dont la somme est $\equiv 0$ (mod p), on est conduit à une contradiction si $p^m > 5$, car le nombre des couples j, $-j$, avec $j \not\equiv 0$, auxquels sont substitués par U des couples de même forme, est $\geqq \frac{p^m - 3}{2}$. Donc F ne peut être imprimitif si $p^m > 5$, et Γ_2 est alors primitif.

Pour établir complètement le théorème II, il ne reste plus qu'à déterminer la classe de Γ_2.

Il suffit pour cela d'étudier le nombre de combinaisons de 2 lettres de C laissées immobiles par les substitutions de C, autres que l'unité, et qui laissent immobile une combinaison donnée, par exemple la combinaison $0, \infty$. Que p soit pair ou impair, ces substitutions sont

celles de la forme

$$V' = |z, a_2 z|, \qquad \text{ou} \qquad V'' = \left|z, \frac{a_2}{z}\right| \pmod p,$$

avec $a_2 \not\equiv 0$ dans V' et V'' et $a_2 \not\equiv 1$ dans V'.

V' ne peut laisser une combinaison i, j immobile, avec $i \not\equiv j$, que si

$$i \equiv a_2 i, \qquad j \equiv a_2 j,$$

ou

$$i \equiv a_2 j, \qquad j \equiv a_2 i.$$

Dans le premier cas, i, j coïncide avec $0, \infty$; dans le deuxième, $i \equiv a_2^2 i$, $j \equiv a_2^2 j$ donne $a_2^2 \equiv 1$. Si p est impair, on a $a_2 \equiv -1 \pmod p$, et la substitution $|z, -z|$ laisse les $\frac{p^m+1}{2}$ combinaisons $0, \infty$ et $i, -i$ immobiles. Si $p = 2$, le deuxième cas donnerait $a_2 \equiv 1$, et V' ne laisse immobile que la combinaison $0, \infty$.

V'' ne peut laisser une combinaison i, j immobile, avec $i \not\equiv j$, que si

$$i \equiv \frac{a_2}{i}, \qquad j \equiv \frac{a_2}{j},$$

ou

$$i \equiv \frac{a_2}{j}, \qquad j \equiv \frac{a_2}{i}.$$

Dans le premier cas, $i^2 \equiv j^2 \equiv a_2$ ne donne une combinaison que si p impair et a_2 résidu quadratique (mod p). Dans le deuxième, $ij \equiv a_2$; on a comme solutions toutes les combinaisons $i, a_2 i^{-1}$, avec $i \not\equiv a_2 i^{-1}$; si p est impair, ces combinaisons sont en nombre $\frac{p^m+1}{2}$ quand a_2 est non-résidu quadratique, et en nombre $\frac{p^m-1}{2}$ quand a_2 est résidu, en y comprenant la combinaison $0, \infty$: car $i_1 \equiv a_2 i^{-1}$ donne $i \equiv a_2 i_1^{-1}$; si $p = 2$, $ij \equiv a_2$, avec $i \not\equiv j$, a, en dehors de la solution $0, \infty$, $2^m - 2$ solutions, ce qui ne donne, en y comprenant la combinaison $0, \infty$, que 2^{m-1} combinaisons distinctes.

On en conclut que Γ_2 renferme des substitutions qui laissent $\frac{p^m+1}{2}$

combinaisons immobiles, si p impair, et 2^{m-1}, si $p=2$, et qu'il n'en contient aucune, à part l'unité, en laissant davantage immobiles. La classe de Γ_2 est donc

$$\frac{p^m+1}{2}p^m - \frac{p^m+1}{2} = \frac{(p^m+1)(p^m-1)}{2},$$

si p impair,

$$\frac{2^m-1}{2}2^m - 2^{m-1} = 2^{2m-1},$$

si $p=2$.

Le théorème II est ainsi complètement établi.

Remarque. — Tout groupe linéaire fractionnaire C considéré au théorème II contient, quand p est impair, un sous-groupe deux fois transitif d'ordre moitié moindre C′ dérivé des substitutions

$$V = \left| z, \frac{az+\alpha}{bz+\beta} \right| \pmod p$$

pour lesquelles $a\beta - b\alpha$ est résidu quadratique $(\bmod p)$.

Le groupe Γ'_2 correspondant à C′, formé des substitutions opérées par C′ entre les combinaisons deux à deux de ses p^m+1 lettres est un groupe primitif de même degré $\frac{p^m+1}{2}p^m$ que Γ_2, de même classe et d'ordre moitié moindre (si p^m est > 11).

En effet, Γ'_2 est transitif et contenu dans Γ_2; la classe de Γ'_2 est la même que celle de Γ_2, car la substitution $V'' = \left| z, \frac{a_2}{z} \right| \pmod p$, où $-a_2$ est résidu quadratique $(\bmod p)$, laisse exactement $\frac{p^m+1}{2}$ combinaisons des lettres de C′ 2 à 2 immobiles, en sorte que la classe de Γ'_2, qui n'est pas inférieure à celle de Γ_2, où il est contenu, est

$$\frac{p^m+1}{2}p^m - \frac{p^m+1}{2} = \frac{p^{2m}-1}{2},$$

comme celle de Γ_2.

Il reste à voir seulement si Γ'_2 est primitif, c'est-à-dire si le groupe D′

des substitutions de C' qui laissent la combinaison $0, \infty$ immobile, groupe dérivé du groupe E' des puissances de la substitution

$$X^2 = |z, a'^2 z| \pmod p$$

et de

$$Y' = \left| z, \frac{a_2}{z} \right| \pmod p,$$

où $-a_2$ est résidu quadratique (mod p), est maximum dans C'. Quand $p^m = 4h + 1$, c'est-à-dire m pair ou $p = 4h' + 1$, on peut prendre $a_2 = 1$, car -1 est résidu quadratique; au contraire, quand $p^m = 4l + 3$, a_2 est non-résidu quadratique.

Le groupe E' permute transitivement d'une part les résidus, d'autre part les non-résidus. De plus, si -1 est non-résidu, il en est de même de a_2, et Y' remplace un résidu par un non-résidu, en sorte que D' opère entre les $n - 2$ indices autres que $0, \infty$ les substitutions d'un groupe régulier. Au contraire, si -1 est résidu, il en est de même de a_2, et D' permute transitivement, d'une part les résidus, d'autre part les non-résidus. Dans les deux cas, D' est formé des substitutions $X^{2\mu}$ et

$$Y'X^{2\mu} = \left| z, \frac{a_2 a'^2}{z} \right| \pmod p.$$

Dans le deuxième cas, cette dernière substitution laisse immobile les deux indices z_1, $-z_1$, racines de la congruence $z^2 \equiv a_2 a'^2 \pmod p$.

Ceci posé, pour établir que z'_2 est primitif, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que le groupe F', dérivé de D' et d'une substitution quelconque U de C', autre que celles de D', coïncide avec C', quel que soit U.

Supposons qu'il en soit autrement, et $F' < C'$. Je dis d'abord que F' est transitif entre les n indices.

En effet, si -1 est non-résidu, D' est transitif, d'une part entre les indices $0, \infty$, d'autre part entre les $n - 2$ autres indices, et toute substitution de F' qui permute exclusivement entre eux d'une part $0, \infty$, d'autre part les $n - 2$ autres indices, appartient à D'. Donc U remplace l'un des indices 0 ou ∞ par un des $n - 2$ autres indices, et F' permute transitivement les n indices.

Si -1 est résidu, supposons F' non transitif. U va permuter ∞, par exemple, avec un résidu; dès lors F' va permuter o et ∞ transitivement avec tous les résidus, puisque E' les permute transitivement, mais non avec les non-résidus, puisque F' est intransitif. F' permute donc transitivement o avec $\frac{p^m-1}{2}+2=\frac{p^m+3}{2}$ lettres, et

$$\mathfrak{F}'=\frac{p^m+3}{2}\mathfrak{K}'=\frac{p^m+3}{2}\frac{p^m-1}{2}\lambda,$$

où $\mathfrak{K}'=\frac{p^m-1}{2}\lambda$ est l'ordre du groupe des substitutions de F' laissant o immobile et contenant E', et divise $(p^m+1)p^m\frac{p^m-1}{2}=\mathfrak{C}'$; c'est-à-dire que p^m+3 divise $2p^m(p^m+1)$ et $2p^m(p^m+3)$, par suite la différence $4p^m$ et $4(p^m+3)-4p^m=12$, d'où $p^m\leqq 9$, ce que nous supposerons ne pas avoir lieu. Donc F' est transitif pour $p^m>9$.

D'après un théorème connu ([1]), F' étant un groupe transitif de classe $n-2$ et de degré n, est d'ordre

$$\mathfrak{F}'=[(p_1k+1)(q_1k+1)+1](p_1k+1)k,$$

où

$$n=(p_1k+1)(q_1k+1)+1,$$

et où k est l'ordre du groupe K des substitutions de F' qui laissent o et ∞ immobiles, en sorte que $k=\mathcal{E}'$; si l'on a $p_1\neq 0$, d'après $\mathcal{E}'=\frac{n-2}{2}$, l'on a $p_1=2$ ou $p_1=1$; si $p_1=2$, $\mathfrak{F}'=\mathfrak{C}'$ contrairement à l'hypothèse $F'<C'$; si $p_1=1$, $p_1k+1=1+\frac{p^m-1}{2}=\frac{p^m+1}{2}$ devrait diviser $n-1=p^m$, ce qui est absurde. Donc $p_1=0$, et

$$\mathfrak{F}'=(p^m+1)\frac{p^m-1}{2}.$$

F' admet une répartition de ses indices en systèmes de non-primiti-

---

([1]) Voir notre *Thèse de Doctorat*, p. 70.

vité de deux indices, le sous-groupe des substitutions de F' qui laisse o immobile coïncidant avec E' : o et ∞ forment un système ([1]).

Si maintenant -1 est résidu, la substitution $Y'X^{2\mu}$ laisse immobile les deux indices z_1 et $-z_1$, racines de la congruence $z^2 \equiv a_2 a'^2$, et déplace tous les autres indices; par suite, la répartition est formée du système o, ∞ et des systèmes $i, -i$, où i prend toutes les valeurs $\not\equiv 0$ et incongrues entre elles (mod p). En raisonnant comme nous l'avons fait pour C et Γ_2, on voit qu'il faut $p^m \leqq 5$.

Si -1 est non-résidu, il y a $\frac{p^m-1}{2} = 2h+1$ systèmes : la substitution X^2 contient dans un de ses cycles les résidus, dans l'autre les non-résidus et est d'ordre $2h+1$; or, si un système comprenait deux résidus, γ_1, γ_2 par exemple, il y aurait une puissance de X^2 remplaçant γ_1 par γ_2, par suite γ_2 par γ_1, et de la forme $(\gamma_1\gamma_2)\ldots$, c'est-à-dire d'ordre pair, ce qui est impossible, car les puissances de X^2 sont d'ordre diviseur de $2h+1$. Donc, chaque système autre que o, ∞ comprend un résidu et un non-résidu : si $\theta = a'^{2k+1}$ est le non-résidu faisant partie du même système que 1, la considération de X^2 montre que ces systèmes sont

$$1, \theta; \quad a'^2, a'^2\theta; \quad a'^4, a'^4\theta; \quad \ldots; \quad a'^{2\mu}, a'^{2\mu}\theta; \quad \ldots.$$

Si $\theta \equiv -1$, tout système autre que o, ∞ est de la forme $i, -i$: on peut encore raisonner comme nous l'avons fait pour C et Γ_2; il faut $p^m \leqq 5$.

Soit $\theta \not\equiv -1$: le raisonnement est encore analogue : U n'est pas d'une des formes $X^{2\mu}$ et $Y'X^{2\mu}$. Soit

$$U = \left| z, \frac{a_1 z + \alpha_1}{b_1 z + \beta_1} \right| \pmod p,$$

avec

$$a_1\beta_1 - b_1\alpha_1 \equiv \Lambda^2 \pmod p.$$

U remplace o par i et ∞ par θi, avec i différent de o et de ∞, ou o

([1]) Voir, par exemple, notre *Thèse de Doctorat*, p. 18, th. VII et VIII, et *Ann. Fac. des Sc. de Toulouse*: 1895, D. 18, th. VII.

par $\theta\iota$ et ∞ par i. Ce deuxième cas se ramène au premier en posant $\theta i = i'$, $\theta' = \theta^{-1}$, $i = \theta^{-1} i' = \theta' i'$, et il nous suffit de considérer le premier cas. On tire de là

$$U = \left| z, \ i\frac{b_1 \theta z + \beta_1}{b_1 z + \beta_1} \right| \pmod{p}.$$

Si U remplace j par h, elle remplace θj par θh (j et h étant différents de o et de ∞); on en conclut que j doit satisfaire à une congruence du second degré (mod p) ayant au plus deux racines, auxquelles correspondent au plus deux systèmes.

De même, si U remplace j' par $\theta j'$, $\theta j'$ par h' (j' et h' différents de o et de ∞), on en conclut que j' doit satisfaire à une congruence du second degré (mod p), ayant au plus deux racines, auxquelles correspondent au plus deux systèmes.

Dès lors, le nombre des systèmes j, θj, avec j différent de o et de ∞, auxquels sont substitués des systèmes de même forme étant $\leqq 4$ et $\geqq \frac{p^m - 3}{2}$, on a $\frac{p^m - 3}{2} \leqq 4$, $p^m \leqq 11$, c'est-à-dire, puisque ici $p^m = 4h + 3$, $m = 1$, $p = 7$ ou 11.

En résumé, F′ ne peut être $<$ C′ que si $p^m \leqq 11$, et l'on en conclut que Γ'_2 est primitif quand $p^m > 11$. C. Q. F. D.

Quatrième cas. — C *contient le groupe linéaire fractionnaire.*

On sait, d'après MM. Mathieu [1] et Jordan [2], que le groupe linéaire fractionnaire considéré au théorème II est contenu dans un groupe de même degré dérivé de lui et de la substitution

$$W = |z, z^{p^\sigma}| \pmod{p},$$

où σ est un diviseur arbitrairement choisi de m. Ces groupes ne diffèrent de ceux considérés au théorème II que si $m > \sigma \geqq 1$. Les groupes Γ_2 correspondants contiennent les groupes Γ_2 dont il est question dans ce

---

(1) *Journal de Mathématiques*; 1861.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1872, 2e sem., p. 1755.

théorème et sont de même degré, par suite sont *a fortiori* primitifs.

De même pour les groupes Γ_2 correspondant aux groupes des substitutions paires des groupes C précédents, quand $p^m > 11$.

Cinquième cas. — C *est un groupe linéaire.*

On voit immédiatement cette propriété :

Les groupes linéaires les plus généraux de degré p^m à m indices réels (mod p) (p étant premier) opèrent entre les combinaisons 2 *à* 2 (*et* 3 *à* 3 *si* $p = 2$) *de leurs lettres des groupes de substitutions transitifs, mais non primitifs, si* $p^m > 3$.

Les groupes linéaires en question contiennent en effet un sous-groupe invariant (c'est-à-dire permutable à leurs substitutions) de degré p^m; les groupes Γ_2 ont la même propriété et, comme ils sont de degré $C^2_{p^m}$ (ou de degrés C^2_{2m} et C^3_{2m} respectivement si $p = 2$), ils contiennent un sous-groupe invariant intransitif, si $p^m < \frac{p^n(p^m-1)}{2}$, c'est-à-dire si $p^m < 3$, et, par suite, ne peuvent être primitifs (¹).

On a une propriété analogue pour les groupes linéaires les plus généraux de degré $p^{m\nu}$ dont les m indices sont formés à l'aide de racines d'une congruence irréductible de degré ν.

III.

Soit C un groupe quelconque, transitif ou non, de degré n et de classe u, Γ_α le groupe, transitif ou non, des substitutions opérées par C entre les C^α_n combinaisons α à α des n lettres de C $\left(1 < \alpha < \frac{n}{2}\right)$. Γ_α est évidemment contenu dans l'isomorphe holoédrique et primitif G_α du groupe symétrique S de n éléments formé par les substitutions que S opère entre ces combinaisons. Nous allons indiquer le moyen de déterminer la classe de Γ_α et donner une limite inférieure de cette classe; puis nous appliquerons les résultats trouvés au cas où C est au moins

(¹) Jordan, *Traité des Substitutions*, p. 41.

deux fois transitif entre ses n lettres, et même, plus généralement, au cas où C est de classe $\geqq \frac{n}{4}$.

Soient

$$U_r = (a_1^1 \ldots a_1^r) \ldots (a_q^1 \ldots a_q^r)$$

une substitution de S d'ordre premier r à q cycles, $U^{(\alpha)}$ la substitution correspondante dans G_α. La classe de Γ_α sera la plus petite des classes des substitutions $U^{(\alpha)}$ appartenant à Γ_α, quand r et q prennent toutes les valeurs possibles correspondantes aux substitutions U_r de C, avec $rq > 1$. On doit noter d'ailleurs qu'à deux substitutions semblables de S, et *a fortiori* de C, correspondront deux substitutions semblables de G_α, et *a fortiori* de Γ_α, et par suite de même classe, car on passe toujours de l'une à l'autre par un simple changement dans la manière de désigner les n lettres.

U_r ne peut laisser immobile une combinaison ayant exactement r' lettres communes ($0 < r' \leqq r$) avec son premier cycle, par exemple, sans qu'on ait $r' = r$; car U_r remplace ces r' lettres par r' lettres appartenant à la fois à la même combinaison et au même cycle que les r' premières, et ceci n'aurait pas lieu si $r' < r$: donc $r' = r$.

Dès lors, toute combinaison laissée immobile par U_r sera formée des lettres de k cycles de U_r, avec $0 \leqq k \leqq q$, $k \leqq E\left(\frac{\alpha}{r}\right)$, et de $\alpha - kr$ lettres non déplacées par U_r, avec $n - qr \geqq \alpha - kr$. Réciproquement, toute combinaison ainsi formée est laissée immobile par U_r. Soit k un entier déterminé satisfaisant aux conditions ci-dessus : une combinaison formée des lettres de k cycles de U_r et de $\alpha - kr$ lettres non déplacées par U_r s'obtiendra en prenant une des C_q^k combinaisons des cycles de U_r, k à k, puis en adjoignant aux kr lettres de cette combinaison une quelconque des $C_{n-qr}^{\alpha-kr}$ combinaisons des $n - qr$ lettres non déplacées par U_r, $\alpha - kr$ à $\alpha - kr$. Le nombre des combinaisons des n lettres α à α, laissées immobiles par U_r et correspondant à la valeur de k considérée, est ainsi $C_q^k C_{n-qr}^{\alpha-kr}$.

Le nombre total des combinaisons laissées immobiles par U_r est ainsi

$$(1) \qquad \nu_{r,q} = \sum\nolimits_k C_q^k C_{n-qr}^{\alpha-kr},$$

k prenant toutes les valeurs entières satisfaisant à

$$(2) \qquad 0 < k < q, \qquad k \leqq \mathrm{E}\left(\frac{\alpha}{r}\right), \qquad n - qr \geqq \alpha - kr,$$

et la classe de $U^{(\alpha)}$ est $C_n^\alpha - \nu_{r,q}$.

Les formules (1) et (2) résolvent complètement le problème de la détermination de la classe de $U^{(\alpha)}$; par suite, elles permettront toujours pour un groupe donné C, de trouver la classe du groupe Γ_α correspondant.

Avant de déduire de ces formules une limite inférieure de la classe de Γ_α, nous allons en faire application aux groupes Γ_2 en prenant pour C un des groupes trois fois transitifs considérés au quatrième cas du paragraphe précédent ([1]), et dérivé des substitutions

$$V = \left| z, \frac{az + \alpha}{bz + \beta} \right| \pmod p \qquad \text{et} \qquad W = \left| z, z^{p^\sigma} \right| \pmod p.$$

Il nous suffit d'avoir le nombre de combinaisons de deux lettres laissées immobiles par les substitutions d'ordre premier du groupe laissant immobile une combinaison déterminée, par exemple la combinaison $0, \infty$. Ces substitutions sont comprises parmi celles dérivées de W, V' et V'' qui forment un groupe Φ d'ordre $2\frac{m}{\sigma}(p^m - 1)$.

Le sous-groupe des substitutions de C, qui laissent trois lettres arbitrairement choisies immobiles, est semblable au sous-groupe Ψ de C d'ordre $\frac{m}{\sigma}$, formé des puissances de W, puisque C est trois fois transitif. Donc toute substitution d'ordre premier de C laissant au moins trois lettres immobiles est semblable à une puissance de W.

De même le sous-groupe des substitutions de C, laissant deux lettres arbitrairement choisies immobiles, est semblable au sous-groupe Θ

([1]) On peut encore faire application de ces formules (1) et (2) par exemple aux groupes primitifs Γ_2 et Γ_3 correspondant au groupe C cinq fois transitif, de degré 12, et au groupe primitif Γ_2 correspondant au groupe quatre fois transitif contenu dans C, et que nous avons mentionnés plus haut. Ces groupes, qui sont de degrés respectifs 66, 220, 55, sont de classes respectives 56, 198, 48.

de C dérivé de W et de V. Toute substitution d'ordre premier de C qui laisse exactement deux des lettres de C immobiles, est régulière, et par suite semblable à une puissance de V, car on a toujours une puissance de V d'ordre égal à un diviseur premier quelconque de $p^m - 1$.

Enfin une substitution Σ d'ordre 2 de C qui ne laisse pas deux lettres de C immobiles au moins (s'il en existe une dans C), est formée de $\frac{p^m+1}{2}$ cycles, si p impair, et de 2^{m-1} cycles, si $p = 2$.

On en conclut immédiatement que les substitutions d'ordre premier de Φ sont semblables à W ou une de ses puissances, à V ou une de ses puissances, enfin à Σ.

Il ne nous reste plus qu'à trouver le nombre de combinaisons laissées immobiles par W et ses puissances, et par Σ, car nous savons que pour V ce nombre est $\frac{p^m+1}{2}$, si p impair, et 1, si $p = 2$.

D'après les formules (1) et (2), ou, comme on le voit de suite, Σ laisse immobiles $\frac{p^m+1}{2}$ combinaisons, si p impair, et 2^{m-1}, si $p = 2$; dans le cas où $p = 2$, Σ existe toujours dans C.

Quant à W, on doit distinguer le cas où son ordre $\frac{m}{\sigma}$ est impair, et celui où il est pair.

1° Si $\frac{m}{\sigma}$ est impair, les puissances de W sont d'ordre impair, et, d'après (1) et (2), le nombre des combinaisons de 2 lettres que W^{η} laisse immobile est C^2_{n-qr}, où $n - qr$ est le nombre des lettres laissées immobiles par W^{η}. Toute puissance de W étant d'ailleurs semblable à une puissance de W d'exposant diviseur de $\frac{m}{\sigma}$, il suffit de supposer η diviseur de $\frac{m}{\sigma}$. Alors

$$W^{\eta} = |z, z^{p^{\eta\sigma}}| \pmod p$$

laisse autant de lettres immobiles que la congruence $z \equiv z^{p^{\eta\sigma}} \pmod p$ a de solutions distinctes, soit, puisque $\eta\sigma$ divise m, $p^{\eta\sigma} + 1$ lettres en y comprenant ∞. Alors W^{η} laisse immobile $\frac{p^{\eta\sigma}-1}{2} p^{\eta\sigma}$ combinaisons, et

le maximum de cette expression s'obtient en prenant pour q la valeur telle que $\frac{m}{q\sigma}$ soit égal au plus petit diviseur premier de $\frac{m}{\sigma}$ qui est ici $\geqq 3$. Ce maximum est alors $\leqq \frac{p^{\frac{m}{3}}+1}{2} p^{\frac{m}{3}} \leqq \frac{p^m}{2}$, comme on le vérifie sans peine, en sorte que, quand $\frac{m}{\sigma}$ est impair, la classe est encore $\frac{(p^m+1)(p^m-1)}{2}$, si p impair, et 2^{2m-1}, si $p=2$, comme pour les isomorphes Γ_2 des groupes linéaires fractionnaires.

2° Si $\frac{m}{\sigma}$ est pair, les puissances de W d'ordre impair sont évidemment les puissances de W^{2^λ}, si 2^λ est la plus haute puissance de 2 qui divise $\frac{m}{\sigma}$, et l'on peut leur appliquer ce qui précède, puisque $\frac{m}{\sigma 2^\lambda}$ est impair : donc elles ne laisseront pas plus de $\frac{p^m}{2}$ combinaisons immobiles. Comme nous n'avons besoin de considérer, ainsi que nous l'avons dit, que des substitutions d'ordre premier, il ne nous reste plus à envisager que la puissance de W qui est d'ordre 2, c'est-à-dire la substitution

$$\left| z, z^{p^{\frac{m}{2}}} \right| \pmod p.$$

Elle laisse évidemment $p^{\frac{m}{2}}+1$ lettres immobiles, et, par suite, d'après (1) et (2),

$$C^2_{p^{\frac{m}{2}}+1} + \frac{p^m - p^{\frac{m}{2}}}{2} = p^m$$

combinaisons. La classe sera ici $p^m \frac{p^m-1}{2}$.

Nous pouvons alors énoncer ce théorème :

Théorème III. — *Soit C le groupe trois fois transitif dérivé du groupe linéaire fractionnaire trois fois transitif considéré au théorème II et de la substitution* $|z, z^{p^\sigma}| \pmod p$, *où* σ *est un diviseur arbitrairement choisi de m, avec* $m > \sigma \geqq 1$. *Le groupe* Γ_2 *des substitutions opérées par C entre les combinaisons 2 à 2 de ses*

$p^m + 1$ *lettres est un groupe primitif, de degré* $\frac{(p^m+1)p^m}{2}$ (*quand* $p^m > 5$) *et de classe* $\frac{(p^m-1)(p^m+1)}{2}$, *si* p *impair et* $\frac{m}{\sigma}$ *impair*, 2^{2m-1}, *si* $p = 2$ *et* $\frac{m}{\sigma}$ *impair*, $\frac{(p^m-1)p^m}{2}$, *si* $\frac{m}{\sigma}$ *pair.*

Remarque. — On a un théorème analogue pour le groupe C′ d'ordre moitié de celui de C formé des substitutions paires de C, quand p est impair.

Si $\frac{m}{\sigma}$ est impair, W^{η} $\left(\eta \text{ diviseur de } \frac{m}{\sigma}\right)$ appartient à C′ : la classe est encore $\frac{(p^m-1)(p^m+1)}{2}$.

Si $\frac{m}{\sigma}$ est pair, $W^{\frac{m}{2\sigma}} = \left| z, z^{p^{\frac{m}{2}}} \right|$ (mod p) est d'ordre 2, régulière, et déplace $p^m - p^{\frac{m}{2}} = p^{\frac{m}{2}}\left(p^{\frac{m}{2}} - 1\right)$ lettres, c'est-à-dire est paire, sauf quand $p^{\frac{m}{2}} - 1 = 4h + 2$, par suite quand $p = 4l + 3$ avec $\frac{m}{\sigma} = 4l' + 2$. Dans ce dernier cas, une puissance de W d'ordre premier ne peut être une substitution paire que si elle est d'ordre impair, et la classe du groupe Γ'_2 des substitutions opérées par C′ entre les combinaisons 2 à 2 de ses lettres est encore $\frac{(p^m-1)(p^m+1)}{2}$, comme quand $\frac{m}{\sigma}$ est impair. Quand au contraire $\frac{m}{\sigma}$ est $\equiv 0$ (mod 4) ou quand $\frac{m}{\sigma}$ est pair avec $p = 4l + 1$, la classe est $\frac{(p^m-1)p^m}{2}$.

On en conclut :

La classe de Γ'_2 *est la même que celle des groupes* Γ'_2 *considérés dans la remarque du théorème II, sauf quand* $\frac{m}{\sigma} \equiv 0$ (mod 4), *ou* $\frac{m}{\sigma}$ *pair avec* $p = 4l + 1$, *cas où la classe est* $\frac{(p^m-1)p^m}{2}$.

IV.

Cherchons maintenant une limite inférieure de la classe de Γ_α, correspondant à un groupe C quelconque de classe $\geq u$, ou, ce qui revient au même, une limite supérieure de $\nu_{r,q}$.

Afin d'éviter une confusion, nous posons pour un instant

$$U_{r,q} = (a_1^1 \ldots a_1^r) \ldots (a_q^1 \ldots a_q^r);$$

considérons

$$U_{r,q+1} = U_{r,q}(a_{q+1}^1 \ldots a_{q+1}^r),$$

quand $r(q+1) < n$. Une combinaison laissée immobile par $U_{r,q+1}$ contient toutes les lettres $a_{q+1}^1, \ldots, a_{q+1}^r$, ou n'en contient aucune, d'après ce qu'on a vu : dans les deux cas, toutes les lettres de cette combinaison, autres que $a_{q+1}^1, \ldots, a_{q+1}^r$, sont permutées exclusivement entre elles par $U_{r,q+1}$, par suite par $U_{r,q}$, en sorte que cette combinaison est laissée immobile par $U_{r,q}$. Donc :

Lemme. — *Parmi les substitutions de* S *ou de* C *d'ordre premier donné* r *et de classe* $\geqq u$, *celles qui laissent immobiles le plus de combinaisons* α *à* α *des* n *lettres sont celles qui ont le moins de cycles possibles.*

Le nombre des cycles de ces substitutions sera alors $\geqq E\left(\frac{u+r-1}{r}\right)$.

D'autre part, si

$$U_r = (a_1^1 \ldots a_1^r) \ldots (a_q^1 \ldots a_q^r)$$

avec r premier impair, considérons la substitution

$$V = (a_1^1 a_1^2) \ldots (a_1^{r-2} a_1^{r-1})(a_2^1 a_2^2) \ldots (a_2^{r-2} a_2^{r-1}) \ldots (a_q^1 a_q^2) \ldots (a_q^{r-2} a_q^{r-1}),$$

d'ordre 2 à $q\frac{r-1}{2}$ cycles, et déplaçant $q(r-1)$ lettres. V permute exclusivement entre elles les lettres de chacun des cycles de U_r, et laisse immobiles les lettres que U_r ne déplace pas. Une combinaison laissée immobile par U_r comprend les lettres de k cycles de U_r et $\alpha - kr$ lettres non déplacées par U_r : donc elle est laissée immobile par V, en sorte que le nombre des combinaisons laissées immobiles par V est au moins égal au nombre des combinaisons laissées immobiles par U_r. La condition $qr \geqq u$, avec $r \geqq 3$, donne d'ailleurs

$$q(r-1) = qr\frac{r-1}{r} \geqq u\frac{r-1}{r} \geqq \frac{2u}{3},$$

et le nombre des cycles de V est $q\frac{r-1}{2} \geqq \frac{u}{3}$.

On obtiendra donc une limite supérieure de $\nu_{r.q}$ pour toutes les substitutions de S d'ordre premier quelconque r à q cycles, avec $qr \leq u$, et *a fortiori* pour celles de C, en cherchant une limite supérieure de $\nu_{2.q}$, pour toutes les valeurs de q telles que $q \leq \frac{u}{3}$.

Le lemme précédent montre d'ailleurs qu'une pareille limite sera précisément $\nu_{2.\varpi}$, où ϖ est le plus petit entier $\geq \frac{u}{3}$. D'après (1) et (2)

$$(3) \qquad \nu_{2.\varpi} = \sum_k C_\varpi^k C_{n-2\varpi}^{\alpha-2k},$$

k prenant toutes les valeurs entières satisfaisant à

$$(4) \qquad 0 \leq k \leq \varpi, \qquad k \leq E\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad n - 2\varpi \geq \alpha - 2k.$$

Si nous supposons u tel que $\varpi \leq \frac{n}{4}$, la dernière condition est superflue, puisque $\alpha < \frac{n}{2}$ par hypothèse; la valeur $k = 0$ est admissible, et si k_1 est la plus petite des quantités ϖ et $E\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, on a

$$(5) \qquad \nu_{2.\varpi} = \sum_0^{k_1} {}_k C_\varpi^k C_{n-2\varpi}^{\alpha-2k};$$

on obtient ainsi deux catégories de valeurs de $\nu_{2.\varpi}$, suivant que ϖ sera $\leq E\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ou $> E\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. On en conclut :

Théorème IV. — *Soient C un groupe quelconque de degré n et de classe $\geq u$, Γ_α le groupe des substitutions opérées par C entre les combinaisons α à α de ses n lettres $\left(1 < \alpha < \frac{n}{2}\right)$. La classe ω de Γ_α est telle que*

$$(6) \quad \omega \geq C_n^\alpha - C_{n-2\varpi}^\alpha - C_\varpi^1 C_{n-2\varpi}^{\alpha-2} - C_\varpi^2 C_{n-2\varpi}^{\alpha-4} - \ldots - C_\varpi^k C_{n-2\varpi}^{\alpha-2k},$$

où ϖ est le plus petit des entiers au moins égaux à un des deux

nombres $\frac{u}{3}$ *et* $E\left(\frac{n}{4}\right)$, *et* k_1 *le plus petit des deux nombres* α *et* $E\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

On pourrait *a fortiori* prendre pour α une valeur plus petite, car on obtiendrait une limite inférieure moins avantageuse.

La même formule (6) donne une limite inférieure de la classe des substitutions des isomorphes holoédriques et primitifs G_α des groupes symétrique ou alterné de n éléments correspondant aux substitutions de classe $\geqq u$ de ces derniers.

Enfin, dans le cas où $\alpha = 2$, on obtient de suite une limite plus avantageuse que la limite (6). En effet, si alors U_r est une substitution d'ordre premier r à q cycles, elle ne peut laisser immobile une combinaison contenant une lettre d'un cycle et non toutes les lettres de ce cycle. Donc, si r est impair, U_r laisse immobiles exactement les C^2_{n-qr} combinaisons 2 à 2 des lettres qu'elle laisse immobiles. Si $r = 2$, U_2 laisse immobiles non seulement les C^2_{n-2q} combinaisons analogues, mais encore les q combinaisons de 2 lettres formées chacune des lettres d'un cycle de U_2, soit $q + C^2_{n-2q}$ combinaisons. Il en résulte, d'après le lemme et les considérations qui précèdent, que toutes les substitutions de classe $\geqq u$ ne laissent pas plus de combinaisons de 2 lettres immobiles qu'une substitution d'ordre 2 à $\theta = E\left(\frac{u}{2}\right)$ cycles, c'est-à-dire qu'une limite supérieure de $\nu_{r,q}$ est ici $\nu_{2,\theta}$. Donc :

Théorème V. — *Soit* C *un groupe quelconque de degré* n *et de classe* $\geqq u$ Γ_2, *le groupe des substitutions opérées par* C *entre les combinaisons* 2 *à* 2 *de ses* n *lettres; la classe* ω *de* Γ_2 *est telle que*

$$(7) \qquad \omega \geqq C^2_n - \theta - C^2_{n-2\theta} = \frac{4\theta(n-\theta-1)}{2},$$

où

$$\theta = E\left(\frac{u}{2}\right).$$

Nous allons appliquer ces formules (6) et (7) au cas où C déplace toutes les combinaisons (ce qui a lieu par exemple si C est transitif

entre n lettres), Γ_α étant alors de degré C_n^α, et, en particulier, au cas où l'on a $u \geqq \frac{1}{4} n$, de façon à avoir des limites inférieures plus simples. Ces résultats s'appliqueront en particulier aux groupes au moins deux ou trois fois transitifs d'après certains théorèmes de M. Bochert [1].

1° *Cas où* $\frac{n}{2} > \alpha \geqq \frac{2n}{9}$.

Si l'on suppose seulement $u > 2$, C ne contient aucune substitution circulaire d'ordre 2. On voit de suite, d'après le lemme précédent, que les substitutions de C ne peuvent laisser plus de combinaisons immobiles qu'une substitution circulaire d'ordre 3 ou une substitution d'ordre 2 à 2 cycles. On en conclut à l'aide des formules (1) et (2) que la classe de Γ_α sera au moins égale à la plus petite des quantités

$$C_n^\alpha - C_{n-3}^\alpha - C_{n-3}^{\alpha-3}$$

et

$$C_n^\alpha - C_{n-4}^\alpha - 2C_{n-4}^{\alpha-2} - C_{n-4}^{\alpha-4}.$$

La classe de Γ_α est alors $\geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha$.

Quand C ne contient aucune substitution circulaire d'ordre 2 et que $\alpha \geqq \frac{2}{9} n$, la classe de Γ_α est $\geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha$.

2° *Cas où* $\frac{2n}{9} \geqq \alpha \geqq 3$.

Nous appliquerons ici la formule (6) et les hypothèses du théorème IV. Soit

$$(8) \qquad \Delta_i = \frac{C_w^i C_{n-2w}^{\alpha-2i}}{C_n^\alpha};$$

on a

$$(9) \qquad \frac{\omega}{C_n^\alpha} = 1 - \sum_0^{k_1} i \Delta_i.$$

[1] *Math. Ann.*, t. 40.

Or

$$\Delta_i = \frac{(n-2\varpi)\dots(n-2\varpi-\alpha+2i+1)}{n(n-1)\dots(n-\alpha+2i+1)}\,\frac{\varpi(\varpi-1)\dots(\varpi-i+1)}{i!}$$
$$\times\frac{\alpha\dots(\alpha-2i+1)}{(n-\alpha+2i)\dots(n-\alpha+1)};$$
$$\frac{(n-2\varpi)\dots(n-2\varpi-\alpha+2i+1)}{n(n-1)\dots(n-\alpha+2i+1)} \leqq \left(\frac{n-2\varpi}{n}\right)^{\alpha-2i},$$

puisque $a < b$ entraîne $\frac{a-j}{b-j} \leqq \frac{a}{b}$ pour $j \geqq 0$;

$$\frac{\varpi(\varpi-1)\dots(\varpi-i+1)}{(n-\alpha+i)\dots(n-\alpha+1)} \leqq \left(\frac{\varpi}{n-\alpha+i}\right)^i \leqq \left(\frac{\varpi}{n-\alpha}\right)^i;$$
$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i+1)}{(n-\alpha+2i)\dots(n-\alpha+i+1)} \leqq \left(\frac{\alpha}{n-\alpha+2i}\right)^i \leqq \left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right)^i;$$
$$(\alpha-i)\dots(\alpha-2i+1) \leqq (\alpha-i)^i \leqq \alpha^i,$$

en tenant compte de ce que $\alpha < \frac{n}{2}$, $\varpi \leqq \frac{n}{4}$; on obtient ainsi

$$(10)\qquad \Delta_i \leqq \left(\frac{n-2\varpi}{n}\right)^{\alpha-2i}\left(\frac{\varpi}{n-\alpha}\right)^i\left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right)^i\frac{\alpha^i}{i!}.$$

Si alors ε et δ sont des quantités satisfaisant à

$$(11)\qquad \frac{\varepsilon n}{2} \geqq 2\varpi \geqq \delta n, \qquad (\varepsilon \leqq 1),$$

et que nous déterminerons avec plus de précision suivant les cas, on a

$$\frac{n-2\varpi}{n} \leqq 1-\delta, \qquad \frac{\varpi}{n-\alpha} \leqq \frac{\varepsilon}{4}\,\frac{9}{7} \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

et (10) donne

$$\Delta_i \leqq \frac{(1-\delta)^{\alpha-2i}}{i!}\left(\frac{\varepsilon\alpha^2}{3(n-\alpha)}\right)^i.$$

Cette formule a lieu même pour $i=0$, et l'on en conclut, d'après (9)

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq 1-(1-\delta)^\alpha\sum_0^{k_1}{}_i\,\frac{1}{i!}\,\frac{1}{(1-\delta)^{2i}}\left(\frac{\varepsilon\alpha^2}{3(n-\alpha)}\right)^i.$$

En posant

(12) $$\alpha\eta = \frac{1}{(1-\delta)^2}\,\frac{\varepsilon\alpha^2}{3(n-\alpha)}$$

et remarquant que

$$\sum_{0}^{k_1}{}_i \frac{(\alpha\eta)^i}{i!} \leqq e^{\alpha\eta},$$

on aura

(13) $$1-\zeta = 1-(1-\delta)^\alpha e^{\alpha\eta} \leqq \frac{\omega}{C_n^\alpha}.$$

Si l'on pose encore

(14) $$\alpha = \mu n \qquad \text{avec} \qquad \mu \leqq \frac{2}{9},$$

on a

(15) $$\eta = \frac{1}{(1-\delta)^2}\,\frac{\varepsilon\mu}{3(1-\mu)}$$

et

(16) $$\zeta = [(1-\delta)e^{\eta}]^\alpha;$$

il n'y a plus qu'à trouver une limite supérieure de ζ.

a. $u = \frac{n}{4}$. — Supposons $n \geqq 22$.

Le plus petit entier ϖ supérieur ou égal à $\frac{u}{3} = \frac{n}{12}$ est

$$E\left(\frac{n+11}{12}\right) \leqq \frac{n+11}{12} \leqq \frac{n}{8},$$

dès que $n \geqq 22$; on aura donc $\varpi \leqq \frac{n}{8}$, et l'on peut prendre ici $\varepsilon = \frac{1}{2}$. D'autre part, $E\left(\frac{n}{4}\right)$ est $\geqq E\left(\frac{n-11}{12}\right)$ dès que $\frac{n}{4} \geqq \frac{n+11}{12}$, ou $n \geqq 6$, et $\varpi = E\left(\frac{n+11}{12}\right) \geqq \frac{n}{12}$. Donc ici $\varpi \geqq \frac{n}{12}$, et l'on peut prendre $\delta = \frac{1}{6}$; alors

$$\eta \leqq \frac{36}{25}\,\frac{1}{6}\,\frac{\mu}{1-\mu} \leqq \frac{6}{25}\,\frac{2}{7} \leqq \frac{12}{175},$$

et l'on vérifie sans peine à l'aide d'une Table de logarithmes népériens que l'on a

$$\log_e \zeta^{-\frac{1}{\alpha}} \geqq 0,11374,$$

d'où

(17) $$\zeta \leqq e^{-0,11374\alpha}.$$

Cette formule nous donne d'abord $\zeta \leqq \frac{3}{4}$, d'où

(18) $$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{1}{4},$$

dès que $\alpha \geqq 3$; elle montre de plus, puisqu'elle donne

(19) $$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq 1 - e^{-0,11374\alpha}.$$

que l'on peut toujours prendre α assez grand $\left(\text{avec } n \geqq \frac{9}{2}\alpha\right)$, pour que $\frac{\omega}{C_n^\alpha}$ soit aussi voisin que l'on veut de l'unité. Enfin l'on a encore, d'après (17),

(20) $$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{1}{2},$$

dès que $\alpha \geqq 7$.

La formule (16) montre d'ailleurs de suite que, pour une valeur donnée de α, même < 7, on aurait pu prendre n assez grand pour que μ soit aussi petit qu'on veut, et en particulier pour que $\zeta \leqq \frac{1}{2}$, d'où

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{1}{2},$$

dès que $\alpha \geqq 4$.

Ces formules s'appliquent toujours en particulier quand C est deux fois transitif et $n \geqq 26$, d'après un théorème de M. Bochert ([1]).

([1]) *Math. Ann.*, t. 40.

b. $u = \frac{n}{3}$. — Supposons $n \geqq 23$.

Le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{u}{3} = \frac{n}{9}$ est

$$E\left(\frac{n+8}{9}\right) \leqq \frac{n+8}{9} \leqq \frac{n}{8},$$

dès que $n \geqq 64$: on aura donc $w \leqq \frac{n}{8}$, et l'on peut prendre ici $\varepsilon = \frac{1}{2}$. D'autre part, $E\left(\frac{n}{4}\right)$ est $> E\left(\frac{n+8}{9}\right)$ dès que $\frac{n}{4} \geqq \frac{n+8}{9}$, ou $n \geqq 7$, et $E\left(\frac{n+8}{9}\right) \geqq \frac{n}{9}$. Donc ici $w \geqq \frac{n}{9}$, et l'on peut prendre $\delta = \frac{2}{9}$; alors

$$\eta \leqq \frac{81}{49}\,\frac{1}{6}\,\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{27}{98}\,\frac{\mu}{1-\mu} \leqq \frac{27}{343};$$

cette limite de η conduirait encore à une formule analogue à (19), mais un peu plus avantageuse et applicable quand $n \geqq 64$. On trouve

(19 *bis*) $$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq 1 - e^{-0,47259\,\alpha}.$$

On peut aussi, en remarquant que $\frac{n+8}{9} \leqq \frac{3n}{20}$ dès que $n \geqq 23$, prendre $\varepsilon = \frac{3}{5}$ et arriver ainsi à la limite supérieure de η

$$\eta \leqq \frac{81}{49}\,\frac{3}{5}\,\frac{1}{3}\,\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{81}{245}\,\frac{\mu}{1-\mu};$$

la formule (16) donne alors

$$\zeta^{-\frac{1}{\alpha}} = (1-\delta)^{-1} e^{-\eta} = \frac{9}{7} e^{-\eta},$$

$$\frac{1}{\alpha}\log \zeta^{-1} = \log\frac{9}{7} - \eta \geqq \log\frac{9}{7} - \frac{81}{245}\,\frac{\mu}{1-\mu},$$

et, pour que $\zeta \leqq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{1}{2}$, il suffira

$$\log\frac{9}{7} - \frac{\log 2}{\alpha} \geqq \frac{81}{245}\,\frac{\mu}{1-\mu}.$$

Cette condition est toujours satisfaite dès que $\mu \leqq \frac{2}{9}$, ce qui est le cas ici, pourvu que $\alpha \leqq 5$.

Quand $\alpha = 4$ et $n \geqq 23$, on remarque que $\mu = \frac{\alpha}{n} \leqq \frac{4}{23}$, et l'inégalité a encore lieu.

Enfin, quand $\alpha = 3$, l'inégalité a encore lieu si l'on prend $n \geqq 53$, $\mu \leqq \frac{3}{53}$.

Nous signalerons l'application de ces résultats quand C est trois fois transitif.

3° *Cas où* $\alpha = 2$.

La formule (7) nous donnera

$$\frac{\omega}{C_n^2} \geqq \frac{1}{2}$$

dès que

$$\frac{4\theta(n-\theta-1)}{n(n-1)} \geqq \frac{1}{2}$$

ou

$$(21) \qquad 8\theta^2 - 8\theta(n-1) + n(n-1) \leqq 0.$$

Il faut que θ soit $\geqq$ à la plus petite valeur θ' qui annule le premier membre; or, si $u \geqq \frac{n}{3}$, $\frac{u}{2} \geqq \frac{n}{6}$, on a $\theta \geqq \frac{n}{6} - 1$, et il suffit que le résultat de la substitution de $\frac{n}{6} - 1$ dans le premier membre de (21) à la place de θ donne un résultat $\leqq 0$. On est conduit à l'inégalité $n^2 - 51n \geqq 0$, qui a lieu pour $n \geqq 51$.

On verrait de la même manière que si $u \geqq \frac{n}{3}$, on a $\frac{\omega}{C_n^2} \geqq \frac{1}{3}$ pour $n \geqq 14$, et que si $u \geqq \frac{n}{4}$ on a $\frac{\omega}{C_n^2} \geqq \frac{1}{3}$ pour $n \geqq 31$, et $\frac{\omega}{C_n^2} \geqq \frac{1}{4}$ pour $n \geqq 18$.

Enfin, si $u \geqq \frac{n}{2}$, on a $\frac{\omega}{C_n^2} \geqq \frac{1}{2}$ pour $n \geqq 3$.

Les principaux résultats obtenus dans les trois cas que nous venons de considérer peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème VI. — *Soient* C *un groupe transitif de degré* n *et de*

classe $\geqq u$; Γ_α *le groupe des substitutions opérées par* C *entre les combinaisons* α *à* α *de ses* n *lettres* $\left(1 < \alpha < \frac{n}{2}\right)$. *Le degré de* Γ_α *est* C_n^α, *et sa classe* ω *satisfait aux inégalités suivantes :*

1° *Si* $u > 2$ *et* $\alpha \geqq \frac{2n}{9}$, *on a*

$$\omega \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha;$$

2° *Si* $\frac{2}{9} n \geqq \alpha \geqq 3$, *on a :*

Pour $u \geqq \frac{n}{4}$ *et* $n \geqq 22$

$$\omega \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha, \qquad si \qquad \alpha \geqq 7.$$

$$\omega \geqq \frac{1}{4} C_n^\alpha, \qquad si \qquad \alpha \geqq 3:$$

Pour $u \geqq \frac{n}{3}$, *si* $n \geqq 23$ *et* $\alpha \geqq 4$, *ou si* $n \geqq 53$ *et* $\alpha = 3$,

$$\omega \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha.$$

Que u *soit* $\geqq \frac{n}{4}$ *ou* $\geqq \frac{n}{3}$, *on a ici*

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq 1 - e^{-a\alpha},$$

où a *est une constante positive.*

3° *Si* $\alpha = 2$, *on a :*

Pour $u \geqq \frac{n}{4}$ *et* $n \geqq 18$

$$\omega \geqq \frac{1}{4} C_n^\alpha;$$

Pour $u \geqq \frac{n}{3}$ *et* $n \geqq 51$, *ou* $u \geqq \frac{n}{2}$ *et* $n \geqq 3$,

$$\omega \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha.$$

V.

On peut retrouver des résultats analogues, à certains égards plus avantageux que les précédents, ainsi qu'il suit :

Reprenons la substitution

$$U_r = (a_1^1 \ldots a_1^r) \ldots (a_q^1 \ldots a_q^r)$$

d'ordre premier r, à q cycles, et supposons $qr > \alpha$.

Nous savons qu'une combinaison laissée immobile par U_r comprendra les lettres de k cycles de U_r, et $\alpha - kr$ lettres non déplacées par U_r, avec $k < q$, puisque $qr > \alpha$.

1° Soit $k > 0$. Prenons un des k cycles dont les lettres font partie de la combinaison χ_1 que nous considérons et qui est laissée immobile par U_r, $(a_1^1 \ldots a_1^r)$ par exemple. Puisque $k < q$, il y a un cycle, $(a_q^1 \ldots a_q^r)$ dont les lettres n'appartiennent pas à χ_1.

Or χ_1 est formé des r lettres $a_1^1, \ldots, a_1^r$ et de l'ensemble Z de $\alpha - r$ autres lettres n'appartenant ni au premier, ni au $q^{\text{ième}}$ cycle de U_r. La combinaison χ_q de α lettres formée de Z et des lettres du $q^{\text{ième}}$ cycle de U_r est également laissée immobile par U_r.

Toute combinaison de α lettres laissée immobile par U_r et différente des deux précédentes en diffère soit parce qu'elle ne comprend ni les lettres $a_1^1, \ldots, a_1^r$, ni les lettres $a_q^1, \ldots, a_q^r$, soit parce qu'elle comprend les lettres d'un de ces cycles, mais que l'ensemble Z' des $\alpha - r$ autres lettres comprend quelque lettre non comprise dans Z.

Alors, à chacune des deux combinaisons χ_1 et χ_q on peut faire correspondre quelques-unes des combinaisons ψ obtenues en remplaçant dans χ_1 une quelconque des lettres $a_1^1, \ldots, a_1^r$ par une quelconque des lettres $a_q^1, \ldots, a_q^r$; on a au moins $r^2 \geqq 4$ combinaisons ψ distinctes, déplacées par U_r : nous en ferons correspondre 2 à χ_1 et 2 autres à χ_q.

2° Soit $k = 0$: ceci suppose $n - qr \geqq \alpha$.

Le même raisonnement n'est plus applicable ; mais aux C_{n-qr}^{α} combinaisons χ' correspondantes, ne comprenant aucune lettre de U_r, nous pouvons faire correspondre toutes les combinaisons ψ' comprenant $\alpha - 1$ des lettres non déplacées par U_r, et une seule des lettres

déplacées par U_r combinaisons qui sont en nombre $qr.C^{\alpha-1}_{n-qr}$, distinctes, déplacées par U_r et distinctes des combinaisons ψ. On a d'ailleurs

$$qr\,C^{\alpha-1}_{n-qr} = \frac{\alpha qr}{n-qr-\alpha+1}\,C^{\alpha}_{n-qr}.$$

Dès lors, aux Θ_1 combinaisons distinctes analogues à χ_1 et comprenant les lettres d'un au moins des cycles de U_r, on fera correspondre $\Theta'_1 \geqq 2\Theta_1$ combinaisons ψ distinctes 2 à 2, soit parce que les deux cycles de U_r, dont elles comprennent des lettres sans les comprendre toutes, ne sont pas les mêmes, soit, quand ils sont les mêmes, parce que les ensembles des $\alpha - r$ autres lettres ne sont pas les mêmes, soit enfin par celles des lettres des deux cycles de U_r dont ils ne comprennent pas toutes les lettres tout en en comprenant quelqu'une.

Aux $\Theta_2 = C^{\alpha}_{n-qr}$ combinaisons distinctes χ' correspondront au moins

$$\Theta'_2 = \frac{\alpha qr}{n-qr-\alpha+1}\,\Theta_2$$

combinaisons ψ' distinctes.

Si l'on choisit une quantité $k \geqq \frac{1}{2}$ telle que

$$\frac{\alpha qr}{n-qr-\alpha+1} > \frac{1}{k},$$

ce qui a lieu, en posant $qr \geqq \frac{n}{l}$ $(l > 1)$, si $k \geqq \frac{l-1}{\alpha}$, on aura

$$\Theta'_2 \geqq \frac{1}{k}\,\Theta_2,$$

et de même

$$\Theta'_1 \geqq 2\,\Theta_1 \geqq \frac{1}{k}\,\Theta_1,$$

par suite

$$C^{\alpha}_n \geqq \Theta_1 + \Theta'_1 + \Theta_2 + \Theta'_2 \geqq \left(1 + \frac{1}{k}\right)(\Theta_1 + \Theta_2),$$

ce qui donne

$$\Theta_1 + \Theta_2 \leqq \frac{k}{k+1}\,C^{\alpha}_{a},$$

et la classe ω de Γ_α est telle que

$$\omega \geqq C_n^\alpha - \Theta_1 - \Theta_2 \geqq \frac{1}{k+1} C_n^\alpha.$$

k est ici un quelconque des nombres satisfaisant à l'inégalité $k \leqq \frac{l-1}{\alpha}$: on pourra donc prendre $k = \frac{l-1}{\alpha}$

$$(22) \qquad \omega \geqq \frac{\alpha}{\alpha + l - 1} C_n^\alpha,$$

en n'oubliant pas que $qr > \alpha$, ce qui a toujours lieu si la classe u du groupe C est $> \alpha$ et $\frac{u}{n} \geqq \frac{1}{l}$.

La formule (22) pour de grandes valeurs de α est moins avantageuse que la formule (19) par exemple ; mais il n'en est pas de même pour de petites valeurs de α. Ainsi :

Si $l = 2$, $u \geqq \frac{n}{2}$, auquel cas la condition $u > \alpha$ a lieu si $\alpha < \frac{n}{2}$, on a, d'après (22),

$$(23) \qquad \omega \geqq \frac{\alpha}{\alpha+1} C_n^\alpha \geqq \frac{2}{3} C_n^\alpha.$$

Si $l = 3$, $u \geqq \frac{n}{3}$, $\alpha < \frac{n}{3}$, on a, d'après (22),

$$(24) \qquad \omega \geqq \frac{\alpha}{\alpha+2} C_n^\alpha \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha.$$

On a d'ailleurs également $\omega \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha$ quand $\alpha > \frac{n}{3}$ d'après le théorème VI.

Si $l = 4$, $u \geqq \frac{n}{4}$, $\alpha < \frac{n}{4}$, on a, d'après (22),

$$(25) \qquad \omega \geqq \frac{\alpha}{\alpha+3} C_n^\alpha,$$

d'où

$$\omega \geqq \frac{2}{5} C_n^2 \qquad \text{si} \qquad \alpha = 2,$$

et

$$\omega \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha \qquad \text{si} \qquad \alpha \geqq 3.$$

D'ailleurs, puisque $\frac{n}{4} > \frac{2}{9} n$, d'après le théorème VI, on a $\omega \geqq \frac{1}{2} C_n^\alpha$ quand $\alpha \geqq \frac{n}{4}$.

Plus généralement on aura, d'après (22), pour $\alpha < u$,

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{\alpha}{\alpha + l - 1} > \frac{1}{l},$$

si

$$(\alpha - 1)(l - 1) > 0,$$

ce qui a toujours lieu.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent alors être résumés dans le théorème suivant :

Théorème VII. — *Soit* C *un groupe transitif de degré* n *et de classe* $\geqq u \geqq \frac{n}{l}$, Γ_α *le groupe des substitutions opérées par* C *entre les combinaisons* α *à* α *de ses* n *lettres* $\left(1 < \alpha < \frac{n}{2}\right)$. *Le degré de* Γ_α *est* C_n^α, *et sa classe* ω *satisfait aux inégalités suivantes :*

1° *Si* $u \geqq \frac{n}{2}$, $l = 2$, *on a*

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{2}{3}.$$

2° *Si* $u \geqq \frac{n}{3}$, $l = 3$, *on a*

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{1}{2}.$$

3° *Si* $u \geqq \frac{n}{4}$, $l = 4$, *on a*

$$\frac{\omega}{C_n^2} \geqq \frac{2}{5},$$

et

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{1}{2}, \qquad si \qquad \alpha \geqq 3.$$

4° *Enfin on a en général pour* $\alpha < u$,

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} \geqq \frac{\alpha}{\alpha + l - 1} > \frac{1}{l},$$

l *pouvant d'ailleurs être pris* $= \frac{n}{u}$, *par suite*

$$\frac{\omega}{C_n^\alpha} > \frac{u}{n}.$$

Sur la méthode des approximations successives de M. Picard;

PAR M. S. ZAREMBA.

1. Soient une équation aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=f\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \tag{1}$$

et une courbe fermée (C). M. Picard a imaginé une méthode, dite des *approximations successives*, permettant, moyennant quelques hypothèses très générales relatives à la nature de la fonction f et à celle de (C), de déterminer une intégrale de l'équation (1) satisfaisant à cette équation à l'intérieur de l'aire limitée par la courbe (C) et prenant sur cette courbe des valeurs données, pourvu cependant que l'étendue de la courbe (C) soit suffisamment petite.

L'extension de la méthode de M. Picard aux équations à trois variables indépendantes, pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=f\left(x, y, z, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \tag{2}$$

dépend, comme on le reconnaît très aisément, des propriétés de la fonction de Green qui peuvent s'énoncer comme il suit :

Soit

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$$

la fonction de Green relative à une surface fermée (S) et aux points $M(x, y, z)$ et $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ situés à l'intérieur de la surface, posons

$$\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

et

$$(3) \qquad G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\rho} - v(x, y, z, \xi, \eta, \zeta):$$

1° On a, en désignant par Dv la dérivée de v prise par rapport à une des variables x, y ou z,

$$(4) \qquad |Dv| < \frac{A}{\rho^2},$$

où A est constante positive ne dépendant que de la surface S et ne croissant pas indéfiniment quand on fait décroître indéfiniment l'étendue de la surface S suivant une loi convenable;

2° On a, en désignant par $D_2 v$ l'une quelconque des dérivées secondes de v par rapport aux variables x, y et z,

$$(5) \qquad |D_2 v| < \frac{B}{\rho^3},$$

où B est une constante jouissant des propriétés analogues à celles dont jouit la constante A;

3° L'intégrale

$$(6) \qquad \int\int\int D_2 v \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

étendue à tout le domaine limité par la surface S, ne dépasse jamais en valeur absolue une constante positive C dépendant uniquement de la nature de la surface (S).

J'ai déjà eu l'occasion de démontrer le premier des trois théorèmes précédents dans une Note insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France,* mais je me suis borné alors au cas d'une surface convexe. Je me propose maintenant d'établir chacun de ces trois théorèmes en abandonnant en outre l'hypothèse de la convexité de la surface (S).

2. Nous supposerons que la surface (S) est simplement connexe, qu'elle possède en chaque point un plan tangent déterminé et qu'elle jouit en outre de la propriété suivante : Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque O de la surface S et dirigeons l'axe des z suivant la normale intérieure en O à la surface. Décrivons ensuite, du point O comme centre, dans le plan des x, y, un cercle (C) de rayon δ suffisamment petit, mais indépendant de la position du point O sur la surface S; considérons la perpendiculaire élevée en un point $P(x, y)$ de l'aire du cercle (C) ou de sa circonférence au plan des x, y et soit z la troisième coordonnée de celui des points de rencontre Q de cette perpendiculaire avec la surface S qui est le plus voisin du point P.

La fonction z admettra pour toutes les valeurs de x et de y satisfaisant à l'inégalité

$$(7) \qquad x^2 + y^2 \leqq \delta^2$$

des dérivées partielles finies et déterminées jusqu'au troisième ordre inclusivement.

Il résulte de ces hypothèses que, en désignant par a, b et c les demi-dérivées secondes de la fonction z pour $x = y = 0$ et en appelant m la limite supérieure des valeurs absolues des dérivées troisièmes de z, on aura

$$(8) \qquad |z - ax^2 - 2bxy - cy^2| < m(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}},$$

pourvu que la condition (7) soit satisfaite.

Lorsque le point P décrit l'aire du cercle (C), le point Q décrit une portion de la surface S. Nous désignerons constamment cette portion de la surface S par S' et nous appellerons S'' le reste de la surface.

Voici maintenant quelques remarques d'un caractère géométrique sur lesquelles nous aurons sans cesse à nous appuyer. Il est évident tout d'abord que l'on pourra trouver une longueur R, telle que toute sphère de rayon R tangente à notre surface lui soit toujours tout entière extérieure, ou tout entière intérieure.

Cela posé, supposons que les axes soient disposés comme tout à l'heure et soit γ une longueur non supérieure à R. Désignons par M_1

et M_2 deux points placés sur l'axe des z, de façon que l'on ait

$$OM_1 = \gamma,$$
$$OM_2 = -\gamma,$$

et considérons un point quelconque A de l'espace qui ne soit pas intérieur à la sphère Σ_2 de rayon R, tangente extérieurement à la surface (S) au point O, origine des coordonnées.

On aura, en posant

$$l_0 = OA, \qquad l_1 = M_1 A \qquad \text{et} \qquad l_2 = M_2 A,$$

les inégalités suivantes :

$$\frac{l_0}{l_2} < 2, \tag{9}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{l_2}{l_0 + \gamma} < 1, \tag{10}$$

$$\frac{l_1}{l_2} < 3. \tag{11}$$

Construisons encore la sphère (Σ_1) de rayon R, tangente intérieurement à la surface (S) au point O.

Nous établirons aisément, en désignant par l la distance du point A au plan des x, y et en supposant que le point A ne soit intérieur ni à la sphère Σ_1, ni à la sphère Σ_2, les inégalités suivantes :

$$\frac{l_1}{l_2} > \frac{1}{3}, \tag{12}$$

$$\frac{l}{l_0^2} < \frac{1}{2R}. \tag{13}$$

On en déduira, en supposant toujours que le point A ne soit intérieur ni à la sphère Σ_1, ni à la sphère Σ_2, les inégalités suivantes :

$$\left| \frac{1}{l_1^3} - \frac{1}{l_2^3} \right| < \frac{9(3^3 - 1)}{R} \frac{\gamma}{l_2^3}, \tag{14}$$

$$\left| \frac{1}{l_1^5} - \frac{1}{l_2^5} \right| < \frac{9(3^5 - 1)}{R} \frac{\gamma}{l_2^5}. \tag{15}$$

3. On sait que la fonction v, figurant dans l'équation (3), considérée comme fonction de x, y, z, peut être regardée comme le potentiel d'une couche simple répandue sur la surface (S). Envisagée ainsi, cette fonction existera dans tout l'espace et elle sera égale à $\frac{1}{\rho}$ sur la surface (S) et à l'extérieur de cette surface. On aura, en désignant par u la densité de la couche donnant naissance au potentiel v, par $d\sigma$, un élément de la surface (S) et par r la distance de cet élément au point M,

$$v = \int_S \frac{u\,d\sigma}{r} \tag{16}$$

et

$$u = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{dv}{dn}\right], \tag{17}$$

le symbole

$$\frac{d}{dn},$$

servant, comme il est d'usage, à représenter la dérivée prise suivant la normale intérieure à la surface.

La fonction de Green étant positive à l'intérieur de la surface à laquelle elle se rapporte; il résulte de l'équation (17) que la fonction u sera constamment positive.

Disposons les axes des coordonnées comme dans les deux premiers numéros; envisageons les points M_1 et M_2, définis au n° 2 et conservons sa signification à la lettre γ. Nous allons démontrer que les dérivées de la fonction v, calculées pour le point M_1 jusqu'au deuxième ordre inclusivement, tendent vers des valeurs bien déterminées lorsque γ tend vers zéro et nous déterminerons des limites supérieures des valeurs absolues de ces dérivées. Considérons tout d'abord les dérivées du premier ordre et en premier lieu la dérivée par rapport à z. On aura, en désignant, par x', y' et z', les coordonnées de l'élément $d\sigma$ et par r_1 et r_2 les distances de cet élément aux points M_1 et M_2,

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_1} &= \int_S \frac{(z'-\gamma)\,u\,d\sigma}{r_1^3}, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_2} &= \int_S \frac{(z'+\gamma)\,u\,d\sigma}{r_2^3}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

On sait d'ailleurs que

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_1}$$

tendra vers une limite déterminée quand on fera tendre γ vers zéro; il nous suffira donc de chercher une limite supérieure de la valeur absolue de cette expression.

Nous avons

$$(19) \qquad \left|\int_S \frac{z' u \, d\sigma}{r_2^3}\right| < \int_S \frac{|z'| u \, d\sigma}{r_2^3}.$$

Or, on trouve, en se reportant à l'inégalité (13) d'abord et à l'inégalité (9) ensuite, que

$$\int_S \frac{|z'| u \, d\sigma}{r_2^3} < \frac{2}{R} \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2},$$

d'où, en désignant par ρ_2 la distance du point M_2 au point $\mu(\zeta, \eta, \zeta)$ défini au n° **1** et en se rappelant que le point M_2 est extérieur à la surface (S),

$$(20) \qquad \int_S \frac{|z'| u \, d\sigma}{r_2^3} < \frac{2}{R} \frac{1}{\rho_2}.$$

J'observe maintenant que

$$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_2}\right| < \frac{1}{\rho_2^2},$$

on aura donc, en tenant compte de la deuxième des équations (18) et des inégalités (20) et (19),

$$(21) \qquad \gamma \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2^3} < \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2}{R} \frac{1}{\rho_2}.$$

On déduit, d'ailleurs, aisément du théorème exprimé par l'inégalité (12), les conséquences suivantes,

$$\left|\int_S \frac{z' u \, d\sigma}{r_1^3}\right| < 3^3 \int \frac{|z'| u \, d\sigma}{r_2^3}$$

et

$$\gamma \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_1^3} < 3^3 \gamma \left| \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2^3} \right|.$$

La première des équations (18) nous donnera donc, en tenant compte des inégalités (20) et (21),

$$\left| \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1} \right| < 3^3 \left(\frac{4}{R} \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right);$$

d'où, en désignant par ρ_1 la distance du point M_1 au point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, en appelant d le maximum de la distance de deux points mobiles sur la surface (S) et en nous appuyant sur l'inégalité (11),

$$(22) \qquad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right| > 3^3 \left(12 \frac{d}{R} + 9 \right) \frac{1}{\rho_1^2}.$$

Considérons maintenant la dérivée par rapport à x.

On a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} = \int_S \frac{u x' \, d\sigma}{r_1^3},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} = \int_S \frac{u x' \, d\sigma}{r_2^3},$$

ce qui donne, en tenant compte de l'inégalité (14),

$$(23) \qquad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} \right| < \frac{9(3^3 - 1)}{R} \gamma \int_S \frac{|x'| \, u\, d\sigma}{r_2^3}.$$

Il serait évidemment aisé de calculer une limite supérieure du second membre de cette inégalité tendant vers zéro avec γ. Il en résulte que $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1}$ tend, lorsque γ tend vers zéro vers une limite déterminée, celle vers laquelle tend $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2}$ dans les mêmes conditions. D'ailleurs, nous pourrons nous contenter d'une limite supérieure moins rapprochée de la valeur réelle de cette quantité et qui s'obtient ainsi :

On a

$$|x'| < r_2 \quad \text{et} \quad \gamma < r_2,$$

par conséquent,

$$\gamma \int_S \frac{|x'|\, u\, d\sigma}{r_2^3} < \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Il suit de là, des inégalités (23) et (11) et de l'inégalité

$$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2}\right| < \frac{1}{\rho_2^2},$$

que

$$(24) \qquad \left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\right| < \left[9 + \frac{27(3^3-1)d}{R}\right]\frac{1}{\rho_1^2},$$

où d représente, comme plus haut, le maximum de la distance de deux points mobiles sur la surface (S).

On trouvera de même

$$(25) \qquad \left|\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_1}\right| < \left[9 + \frac{27(3^3-1)d}{R}\right]\frac{1}{\rho_1^2}.$$

Désignons maintenant par Dv une dérivée première de v par rapport à une des variables x, y ou z, calculée pour un point M intérieur à la surface (S) dont la plus courte distance à cette surface ne soit pas inférieure à R.

Il viendra

$$|\mathrm{D}v| < \int_S \frac{u\, d\sigma}{r^2} < \frac{1}{R^2}\int_S u\, d\sigma = \frac{1}{R^2};$$

on aura donc *a fortiori*

$$|\mathrm{D}v| < \frac{d^2}{R^2}\frac{1}{\rho^2}.$$

Il résulte de cette inégalité et des inégalités (22), (24) et (25) que l'on aura en posant

$$(26) \qquad A = 3^5 + 27.26\frac{d}{R} + \frac{d^2}{R^2},$$

en désignant par Dv une dérivée première de v par rapport à une des variables x, y ou z, calculée pour un point *quelconque* intérieur à la

surface (S) et en appelant ρ la distance de ce point au point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$,

$$|\mathrm{D}v| < \frac{\mathrm{A}}{\rho^2}.$$

Or A reste fini quand l'étendue de la surface (S) décroît suivant une loi convenable : ainsi, par exemple, si la surface reste constamment semblable à une surface fixe, A reste constant. Le premier des trois théorèmes que nous voulions établir est donc démontré.

4. Passons à l'étude des dérivées secondes de v. Conservons à cet effet les notations du numéro précédent, continuons à désigner par x', y', z' les coordonnées d'un élément $d\sigma$ de la surface (S) et soit toujours r_2 la distance de cet élément au point M_2. Nous obtiendrons facilement, comme on le verra plus loin, tous les résultats qui nous sont nécessaires après avoir démontré que l'intégrale

$$(27) \qquad \mathrm{J} = \int_{\mathrm{S}} \frac{x' z' u \, d\sigma}{r_2^5}$$

tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro et après avoir calculé une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale.

Désignons, dans ce but, comme au n° **2**, par (S') la portion de la surface (S) à laquelle se rapporte l'inégalité (8) et par S'' le reste de cette surface.

Posons

$$\mathrm{J}' = \int_{\mathrm{S}'} \frac{x' z' u \, d\sigma}{r_2^5}$$

et

$$\mathrm{J}'' = \int_{\mathrm{S}''} \frac{x' z' u \, d\sigma}{r_2^5}.$$

Nous aurons alors

$$(28) \qquad \mathrm{J} = \mathrm{J}' + \mathrm{J}''.$$

L'étude de l'intégrale J' peut seule donner lieu à des difficultés; c'est donc d'elle qu'il convient de nous occuper en premier lieu.

L'inégalité (8) nous montre que l'on peut poser

$$(29) \qquad z' = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + \theta m(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}},$$

en désignant par θ une fonction de x' et y' qui, en valeur absolue, reste plus petite que l'unité pour toutes les valeurs de x' et y' satisfaisant à l'inégalité

$$x'^2 + y'^2 \leq \delta^2.$$

La fonction θ sera visiblement une fonction continue de x' et y' pour toutes les valeurs de ces variables vérifiant l'inégalité précédente, sauf pour

$$x' = y' = 0.$$

Portons la valeur (29) de z' dans l'intégrale J', il viendra

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} J' = a \int_S \frac{x'^3 u\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} + 2b \int_S \frac{x'^2 y' u\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} + c \int_S \frac{x' y'^2 u\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} \\ + m \int_S \frac{u x' \theta (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Il résulte immédiatement de la continuité des fonctions u et θ que la dernière intégrale du deuxième membre de cette équation tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro : il nous suffira donc de calculer une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale.

Or, on a

$$|x'| < r_2$$

et

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} < r_2;$$

il s'ensuit que

$$(31) \qquad \left| \int_S \frac{u x' \theta (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} \right| < \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2} < \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Nous nous servirons, pour établir les propriétés des autres intégrales qui figurent au deuxième membre de l'équation (30), des valeurs connues des dérivées du troisième ordre de v à l'extérieur de la surface (S).

Soit M un point situé sur l'axe des z à l'extérieur de la surface (S) à une distance non supérieure en valeur absolue à R de cette surface. Posons

$$z = \mathrm{OM};$$

désignons par r la distance du point M à l'élément $d\sigma$ de la surface (S) et considérons l'expression

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M = -9\int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r^5} + 15\int_S \frac{x'^3 u\, d\sigma}{r^7}.$$

Il vient, en multipliant cette équation par z et en effectuant une transformation facile,

$$\begin{aligned} z\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M = &-9\int_S \frac{x'(z-z')u\, d\sigma}{r^5} + 15\int_S \frac{x'^3(z-z')u\, d\sigma}{r^7} \\ &-9\int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r^5} + 15\int_S \frac{x'^3 z' u\, d\sigma}{r^7}. \end{aligned}$$

Multiplions l'équation précédente par dz, intégrons de $-$R à $-\gamma$ et désignons par C le point ayant pour coordonnées

$$x = y = 0,$$
$$Z = -\mathrm{R},$$

et soit en outre r_c la distance de l'élément $d\sigma$ au point C, il viendra

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-R}^{-\gamma} z\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M dz = &\,3\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_c\right] \\ &-3\left(\int_S \frac{u x'^3\, d\sigma}{r_2^5} - \int_S \frac{u x'^3\, d\sigma}{r_c^5}\right) \\ &-9\int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u x' z'\, d\sigma}{r^5} + 15\int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u x'^3 z'\, d\sigma}{r^7}. \end{aligned} \right.$$

On ne manquera pas d'apercevoir, en considérant cette équation avec quelque attention et en se rappelant que

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M = -9\frac{\xi}{\rho^5} + 15\frac{\xi^2}{\rho^7},$$

que l'intégrale

$$(33) \qquad \int_S \frac{u\,x'^3\,d\sigma}{r_2^5}$$

tend vers une limite finie et déterminée lorsque γ tend vers zéro.

Cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale et observons à cet effet que l'on a évidemment

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left| \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u\,x'\,z'\,d\sigma}{r^5} \right| < \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u\,|z'|\,d\sigma}{r^4}, \\ &\left| \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u\,x'^3\,z'\,d\sigma}{r^7} \right| < \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u\,|z'|\,d\sigma}{r^4}. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on désigne par r_0 la distance du point O à l'élément $d\sigma$, on aura, à cause de l'inégalité (13)

$$|z'| < \frac{r_0^2}{2R},$$

et par conséquent, eu égard à l'inégalité (9),

$$|z'| < \frac{2r^2}{R},$$

il s'ensuit que

$$(35) \qquad \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u\,|z'|\,d\sigma}{r^4} < \frac{2}{R} \int_{-R}^{-\gamma} dz \int \frac{u\,d\sigma}{r^2};$$

mais l'inégalité (10) nous montre que

$$r > \frac{1}{4}(r_0 - z):$$

il viendra donc

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u\,d\sigma}{r^2} &< 16 \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u\,d\sigma}{(r_0 - z)^2} \\ &< 16 \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_0 + \gamma} < 16 \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2} = \frac{16}{\rho_2}. \end{aligned} \right.$$

On trouve d'ailleurs, sans aucune difficulté, en faisant un usage

convenable de l'inégalité (10), que

$$(37) \qquad \left| \int_{-R}^{-\gamma} z \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_M dz \right| < \frac{5.2^{10}}{\rho_2^2}.$$

D'ailleurs

$$(38) \qquad \begin{cases} \left| \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} \right)_c \right| < \dfrac{1}{R^2}, \\ \left| \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} \right| < \dfrac{1}{\rho_2^2}, \end{cases}$$

et

$$(39) \qquad \left| \int_S \frac{u x'^3 d\tau}{r_c^5} \right| < \frac{1}{R^2}.$$

Cela posé, on déduit de l'équation (32) et des inégalités (34), (35), (36), (37), (38) et (39), la conséquence suivante :

$$(40) \qquad \left| \int_S \frac{x'^3 u \, d\tau}{r_2^5} \right| < \frac{5.2^{10} + 3}{3 \rho_2^2} + \frac{2^8}{R \rho_2} + \frac{2}{R^2}.$$

Décomposons l'intégrale (33) en deux parties de la manière dont nous avions décomposé l'intégrale J (*voir* le commencement du n° 4). Il viendra

$$\int_S \frac{x'^3 u \, d\tau}{r_2^5} = \int_{S'} \frac{x'^3 u \, d\tau}{r_2^5} + \int_{S''} \frac{x'^3 u \, d\tau}{r_2^5}.$$

Or, la seconde des intégrales du deuxième membre est en valeur absolue inférieure à

$$\frac{1}{\delta \rho_2};$$

il résulte de là et de l'inégalité (40) que

$$(41) \qquad \left| \int_{S'} \frac{x'^3 u \, d\tau}{r_2^5} \right| = \frac{H}{\rho_2^2},$$

en posant

$$(42) \qquad H = \frac{1}{3} 5.2^{10} + 1 + 2^8 \frac{d}{R} + 2 \frac{d^2}{R^2} + \frac{d}{\delta},$$

où d représente, comme dans le numéro précédent, le maximum de la distance de deux points mobiles sur la surface (S).

On trouvera aisément, en appliquant la même méthode que tout à l'heure,

$$(43)\qquad \begin{cases} \left|\displaystyle\int_{S'} \frac{x'^2 y' u\, d\sigma}{r_2^5}\right| < \dfrac{H}{\rho_2^2}, \\ \left|\displaystyle\int_{S'} \frac{x' y'^2 u\, d\sigma}{r_2^5}\right| < \dfrac{H}{\rho_2^2}. \end{cases}$$

Désignons par N la limite supérieure des valeurs absolues des nombres a, b et c qui figurent dans l'équation (8); l'équation (30) nous donnera, en tenant compte des inégalités (31), 41 et (43),

$$|J'| < \frac{4NH}{\rho_2^2} + \frac{m}{\rho_2}.$$

Or, on a manifestement

$$|J''| < \frac{1}{\delta^2 \rho_2};$$

il résulte donc de l'équation (28) que

$$(44)\qquad |J| < \frac{F}{\rho_2^2},$$

en posant

$$(45)\qquad F = 4NH + md + \frac{d}{\delta^2}.$$

Observons qu'il suit de tout ce qui précède que non seulement l'intégrale J vérifie l'inégalité (44) mais qu'elle tend en outre vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro.

5. Nous voici en mesure d'étudier les dérivées secondes de la fonction v à l'intérieur de la surface (S).

Nous avons

$$(46)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_1} = 3\displaystyle\int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_1^5} - 3\gamma \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_1^5}, \\ \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_2} = 3\displaystyle\int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_2^5} + 3\gamma \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_2^5}. \end{cases}$$

On trouve, en faisant usage de l'inégalité (15),

$$(47)\quad \left| \int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_1^5} - \int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{9(3^5-1)}{R} \gamma \int_S \frac{|x'|\,|z'|\, u\, d\sigma}{r_2^5},$$

et comme les inégalités (9) et (13) nous donnent

$$|z'| < \frac{2 r_2^2}{R},$$

il vient

$$\int_S \frac{|x'|\,|z'|\, u\, d\sigma}{r_2^5} < \frac{2}{R} \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2^2},$$

ce qui montre que la différence (47) tend vers zéro en même temps que γ. D'ailleurs

$$\gamma \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2^2} < \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\rho_2},$$

ce qui donne

$$\left| \int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_1^5} - \int \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{2.9(3^5-1)}{R^2} \frac{1}{\rho_2}.$$

On obtient, par une méthode analogue,

$$\left| \gamma \left[\int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_1^3} - \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_2^3} \right] \right| < \gamma^2 \frac{9(3^5-1)}{R} \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2^3} < \frac{9(3^5-1)}{R} \gamma \int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2^2}$$

d'où, eu égard à l'inégalité (21)

$$(49)\quad \left| \gamma \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_1^3} - \gamma \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_2^3} \right| < \frac{9(3^5-1)}{R} \left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2}{R} \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Ce résultat n'est pas tout à fait suffisant parce qu'il ne permet pas d'affirmer avec certitude que le produit

$$\gamma \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_1^3}$$

tend vers une limite bien déterminée lorsque γ tend vers zéro. Pour

mettre ce point en lumière, considérons l'expression

$$\gamma \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2^3};$$

elle tend, comme on sait, vers $2\pi u$ lorsque γ tend vers zéro. On en conclut par un calcul facile que dans le cas où l'expression

$$(50) \qquad + \frac{3\gamma}{2\pi} \int_S \frac{x' u\,d\sigma}{r_2^5}$$

tend vers une limite lorsque γ tend vers zéro, la fonction u admet une dérivée première en O par rapport à un arc tracé sur la surface (S) et tangent en O à l'axe des x, cette dérivée étant égale à la limite de l'expression (50).

Or, on a vu au numéro précédent que le premier terme du second membre de la deuxième des équations (46) tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro, et comme le premier membre de cette équation tend manifestement vers une limite déterminée quand γ tend vers zéro, il est évident qu'il en est de même du deuxième terme du second membre. Par conséquent, l'expression (50) tend bien vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro. Cela prouve que la fonction u possède des dérivées premières sur la surface (S). Sachant cela, on voit de suite que le premier membre de l'inégalité (49) tend vers zéro lorsque γ tend vers zéro. On conclut de tout ce qui précède que l'expression

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\right)_{M_1}$$

tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro.

Les équations (46) et les inégalités (44), (48) et (49) nous donnent

$$\left|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\right)_{M_1} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\right)_{M_2}\right| < 6\frac{F}{\rho_2^2} + \frac{27(3^5-1)}{R}\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{4}{R\rho_2}\right),$$

d'où

$$\left|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\right)_{M_1}\right| < \left[6Fd + 27(3^5-1)\frac{d}{R}\left(1+4\frac{d}{R}\right)+3\right]\frac{1}{\rho_2^3}.$$

Ce qui donne, en remarquant que d'après l'inégalité (11)

$$\rho_2 > \frac{1}{3}\rho_1$$

et, en posant

$$(51)\qquad G = 27\left[3 + 6Fd + 27(3^5 - 1)\frac{d}{R}\left(1 + 4\frac{d}{R}\right)\right],$$

$$(52)\qquad \left|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\right)_{M_1}\right| < \frac{G}{\rho_1^3}.$$

Je remarque maintenant que l'on peut très aisément déduire des expressions connues des dérivées de la fonction v à l'extérieur de la surface (S) et du fait établi plus haut que la fonction u admet des dérivées du premier ordre sur la surface (S), la conclusion suivante : les expressions

$$(53)\qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{M_1}, \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)_{M_1} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{M_1}$$

tendent chacune vers une limite parfaitement déterminée lorsque l'on fait tendre γ vers zéro. On trouve d'ailleurs, en évaluant par excès, les valeurs absolues des différences des expressions précédentes et des expressions analogues relatives au point M_2, et en se servant pour cela des procédés employés plus haut :

$$(54)\qquad \begin{cases} \left|\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{M_1}\right| < \dfrac{G_1}{\rho_1^3}, \\ \left|\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)_{M_1}\right| < \dfrac{G_1}{\rho_1^3}, \\ \left|\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{M_1}\right| < \dfrac{G_1}{\rho_1^3}, \end{cases}$$

en posant

$$G_1 = 27\left\{3 + [9(3^3 - 1) + 27(3^5 - 1)]\left(1 + 2\frac{d}{R}\right)\frac{d}{R}\right\}.$$

Les expressions (53) tendant vers des limites déterminées lorsque γ tend vers zéro, il en sera de même de l'expression

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_{M_1}.$$

On déduit d'ailleurs des inégalités (54) que l'on a

$$(55) \qquad \left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{M_1} \right| < 2 \frac{G_1}{\rho_1^3}.$$

Cela posé, désignons par $D_2 v$ une dérivée seconde de v calculée pour un point quelconque intérieur à la surface, mais tel que sa plus courte distance à la surface ne soit pas inférieure à R.

On aura

$$|D_2 v| < \frac{3}{R^3},$$

et *a fortiori*

$$(56) \qquad |D_2 v| < 3 \left(\frac{d}{R} \right)^3 \frac{1}{\rho^3},$$

où ρ désigne la distance du point considéré au point $u(\xi, \eta, \zeta)$.

Désignons par B le plus grand des nombres

$$(57) \qquad G, \qquad 2G_1 \qquad \text{et} \qquad 3\left(\frac{d}{R} \right)^3;$$

nous pouvons écrire, en vertu des inégalités (52), (54) et (55), en désignant maintenant par $D_2 v$ l'une quelconque des dérivées secondes de v prises par rapport aux variables x, y et z, pour un point *quelconque* intérieur à la surface (S) :

$$|D_2 v| < \frac{B}{\rho^3},$$

où ρ désigne la distance du point considéré au point u.

Or, on reconnaît, en se reportant aux valeurs trouvées pour les nombres (57), que si l'on fait décroître l'étendue de la surface (S) suivant une loi convenable, le nombre B ne dépassera jamais un nombre fixe; ainsi, par exemple, si la surface (S) reste semblable à une surface fixe, le nombre B reste constant. Le deuxième des théorèmes que nous voulions établir est donc démontré.

6. Il ne nous reste plus qu'à démontrer le dernier des trois théorèmes énoncés au n° **1**. Posons

$$w = \int\int\int v \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

où l'intégration doit être étendue à tout le domaine limité par la surface (S).

L'intégrale (6) n'est pas autre chose qu'une dérivée seconde de w. On sait que w peut être regardé comme le potentiel d'une simple couche répandue sur la surface (S) avec une densité telle que, à l'extérieur de la surface, la fonction w soit identique au potentiel Ψ d'un solide homogène de densité égale à 1, limité par la surface (S). La densité ϖ de la couche donnant lieu au potentiel w sera manifestement positive en chaque point de la surface (S); cela résulte de ce que la densité de la couche donnant lieu au potentiel v est positive. D'ailleurs, on calculera sans peine une limite supérieure de ϖ.

Disposons les axes des coordonnées, comme nous l'avons constamment fait dans les numéros précédents, et envisageons les points M_1 et M_2 que nous avons déjà considérés tant de fois, ou plutôt, bornons notre attention au point M_2 qui est extérieur à la surface (S). Si l'on calcule pour le point M_2 les dérivées de la fonction Ψ, par rapport à x et y jusqu'au troisième ordre inclusivement, on reconnaîtra sans la moindre peine, en tenant compte des hypothèses faites au sujet de la surface (S), que ces dérivées tendent vers des limites finies et parfaitement déterminées quand on fait tendre γ vers zéro. Comme d'ailleurs, à l'extérieur de la surface (S), w est égale à Ψ, les dérivées de la fonction w jouissent des mêmes propriétés. Il résulte de là que la méthode employée au n° 4 pourra être appliquée.

On prouvera ensuite, par un procédé analogue à celui que nous avons employé au n° 5, que la fonction ϖ admet des dérivées premières sur la surface (S) et que si l'on calcule les dérivées de la fonction w jusqu'au deuxième ordre inclusivement, pour un point intérieur à la surface (S) et si l'on fait tendre ce point vers un point quelconque de la surface (S), ces dérivées tendront vers des limites déterminées pour les valeurs absolues desquelles l'on pourra déterminer une limite supérieure C qu'elles ne dépasseront en aucun point de la surface. D'ailleurs, il est clair qu'*a fortiori* les dérivées secondes de w calculées pour un point intérieur à la surface (S) ne pourront jamais dépasser le nombre C. Ainsi donc le troisième théorème se trouve démontré.

Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique [1];

PAR M. HADAMARD.

L'étude des équations différentielles se poursuit actuellement dans deux directions différentes. On peut avoir en vue la nature analytique des fonctions cherchées, et les considérer dans tout le champ des valeurs réelles ou complexes de la variable indépendante. Mais on peut aussi, en restant dans le domaine réel, suivre la voie tracée par les travaux de Sturm et par ceux de MM. Poincaré et Picard, où l'on se propose simplement de discuter le sens dans lequel varient les inconnues, et où les relations d'inégalité jouent un rôle prépondérant

C'est à ce dernier point de vue que je me placerai exclusivement, dans ce qui va suivre, pour étendre aux cas généraux certaines remarques simples qui s'offrent dans l'étude des problèmes les plus élémentaires de la Dynamique.

1. Considérons, par exemple, une surface de révolution, rapportée aux coordonnées semi-polaires r, θ, z et définie par une équation entre

(1) Les principaux résultats contenus dans le présent travail ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un Mémoire couronné en 1896 (prix Bordin). Ce Mémoire contenait, en outre, un résultat relatif aux surfaces à courbures opposées et qui sera développé plus tard.

r et z, et le mouvement (sans frottement) d'un point sur cette surface, sous l'influence de forces dérivant d'une fonction de forces U indépendante de θ. Une discussion bien connue montre que la trajectoire reste, en général, comprise entre deux parallèles de la surface. Ces parallèles peuvent, par un choix convenable des constantes d'intégration, être choisis arbitrairement, mais sous la condition que la plus plus petite des deux valeurs de r corresponde à la plus grande des deux valeurs de U : ils comprennent, par conséquent, entre eux une région de la surface où r et U varient en sens contraire ([1]). S'il s'agit d'une géodésique, cette dernière conclusion subsiste en général, les deux parallèles limites devant, cette fois, avoir le même rayon.

C'est ainsi qu'un point pesant mobile sans frottement sur une sphère passe, en général, à quelque instant de son mouvement, dans l'hémisphère inférieur.

2. La circonstance que nous venons de rappeler n'est que l'application aux surfaces de révolution d'un principe général : comme nous allons le voir, dans le mouvement d'un point sur une surface quelconque, on peut toujours assigner une région R que la trajectoire doit (sauf dans un cas exceptionnel) traverser une infinité de fois.

Ce principe est d'ailleurs celui qui a été invoqué par M. Kneser dans son Mémoire intitulé : *Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen* ([2]). Toutefois ce géomètre ne l'a appliqué qu'à l'étude du mouvement dans le voisinage d'une position d'équilibre instable, au lieu qu'en réalité la portée en est plus générale. Cela tient à ce que la région R indiquée par l'auteur, du moins dans la forme algébrique de son raisonnement, est moins restreinte que celle que nous formerons ([3]).

3. Considérons, d'une manière générale, un système d'équations

---

([1]) Sauf dans le cas exceptionnel où r et U ont leur maximum ou leur minimum en même temps.

([2]) *Journal de Crelle*, t. 115, p. 300 et suiv.

([3]) La région introduite par M. Kneser est celle à laquelle on serait conduit en partant de la remarque que nous donnons au n° 25.

différentielles du premier ordre,

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{1}$$

où les X_i sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces dernières quantités étant considérées comme les coordonnées d'un point M dans l'espace E_n à n dimensions, le système (1) définit un faisceau de trajectoires de ce point : si, comme nous le supposerons, les fonctions X sont univoques, il passe une trajectoire et une seule par un point pris au hasard.

Soit $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction univoque quelconque. Lorsque le point M décrira (t variant de t_0 à $+\infty$) sa trajectoire, cette fonction aura, en général, une infinité de maxima et de minima successifs.

Or ces maxima et minima ne peuvent évidemment être situés en des points arbitraires. Si l'on désigne par $X(f)$ le symbole

$$X(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

tout point où V est maximum ou minimum devra satisfaire à l'équation

$$X(V) = 0, \tag{2}$$

laquelle représente, dans l'espace E_n, une multiplicité à $n-1$ dimensions. De plus, suivant qu'il y a maximum ou minimum, on devra avoir l'une ou l'autre des deux inégalités

$$X[X(V)] \leq 0, \tag{3}$$

$$X[X(V)] \geq 0, \tag{3'}$$

lesquelles définissent chacune une portion de la surface (2), la première de ces portions étant constituée par les points où la trajectoire passe de la région $X(V) > 0$ à la région $X(V) < 0$, la seconde par les points où a lieu le passage inverse ; la limite de ces deux portions, qui est une multiplicité à $n-2$ dimensions, se compose des points où la trajectoire est tangente à la surface (2).

Ainsi *une trajectoire quelconque traversera, en général, une infinité de fois la surface* (2) *et cela, successivement, dans chacune des deux régions de cette surface déterminées respectivement par les inégalités* (3), (3′).

4. Pour que la conclusion précédente tombe en défaut, il faut que, à partir d'une certaine valeur de t, la fonction V varie constamment dans le même sens; aille, par exemple, toujours en croissant.

Or, dans ces conditions, il arrivera, soit que cette quantité augmente indéfiniment avec t, soit qu'elle tende vers une limite.

Nous écarterons la première hypothèse, soit que V reste nécessairement fini dans le domaine des valeurs que peuvent prendre x_1, x_2, ..., x_n, soit que nous fassions abstraction des trajectoires le long desquelles il devient infini. Nous admettrons donc que V tend vers une limite et nous nous servirons du lemme suivant :

Si, lorsque la variable t augmente indéfiniment, la fonction V *de cette variable tend vers une limite et que ses n* + 1 *premières dérivées existent et restent finies, les n premières d'entre elles tendant vers zéro.*

Bornons-nous, pour simplifier, à la dérivée première. Nous avons à faire voir que cette dérivée est, pour t suffisamment grand, plus petite en valeur absolue qu'un nombre quelconque donné ε.

Soit, à cet effet, l un nombre choisi arbitrairement. Dans la suite des valeurs de t, il ne peut exister une infinité d'intervalles ayant chacun une étendue supérieure à l et où $\left|\frac{dV}{dt}\right|$ soit plus grand que $\frac{\varepsilon}{2}$: car, dans un pareil intervalle, V varierait de plus de $\frac{l\varepsilon}{2}$, ce qui ne peut se produire indéfiniment puisque V tend vers une limite. A partir du moment où ces intervalles cesseront de se rencontrer, le module de $\frac{dV}{dt}$ sera manifestement plus petit que ε si nous avons pris pour l un nombre qui, multiplié par la limite supérieure de $\left|\frac{d^2V}{dt^2}\right|$, donne un produit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Le même raisonnement s'étendant aux dérivées suivantes, notre lemme est démontré.

5. Appliquons ce lemme à la quantité V considérée aux numéros précédents, en admettant que cette fonction et ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, ainsi que les fonctions X_i et leurs dérivées partielles du premier et du second ordre, restent finies lorsque le point mobile s'éloigne indéfiniment sur cette trajectoire. Dans ce cas, $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$ et $\frac{d^3V}{dt^3}$ restent finis. Donc $\frac{dV}{dt} = X(V)$ et $\frac{d^2V}{dt^2} = X[X(V)]$ tendent vers zéro.

Nous arrivons, par conséquent, à la conclusion suivante :

Lorsque la fonction V et ses dérivées jusqu'au troisième ordre, les fonctions X_i et leurs dérivées jusqu'au second ordre restent finies pour t infini, la trajectoire traverse une infinité de fois chacune des régions de la surface (2) *définies respectivement par les inégalités* (3), (3'); *ou sinon, elle est asymptotique à la multiplicité à $n-2$ dimensions qui sert de limite commune à ces deux régions.*

Ce dernier cas doit d'ailleurs être regardé comme exceptionnel [1].

6. Quoique les équations de la Dynamique soient du second ordre et ne puissent être ramenées au premier que par l'introduction des vitesses comme inconnues auxiliaires, elles vont nous fournir des résultats très analogues aux précédents, surtout dans le cas le plus simple et dont nous allons nous occuper tout d'abord, celui où il n'y a que deux degrés de liberté.

Considérons un système dont la position ne dépend que de deux paramètres u, v, par exemple un point matériel, de masse égale à 1, mobile sans frottement sur une surface où u, v sont les coordonnées curvilignes. U étant la fonction des forces et $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$ la

(1) *Voir* plus loin, n° 53.

force vive, les équations du mouvement donneront

$$(EG - F^2)\frac{d^2 u}{dt^2} = G\frac{\partial U}{\partial u} - F\frac{\partial U}{\partial v} + u'^2\left(F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right)$$
$$+ u'v'\left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right)$$
$$+ v'^2\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}\right),$$

$$(EG - F^2)\frac{d^2 v}{dt^2} = - F\frac{\partial U}{\partial u} + E\frac{\partial U}{\partial v} + u'^2\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right)$$
$$+ u'v'\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right)$$
$$+ v'^2\left(F\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

Soit V une fonction de u, v dont nous désignerons, pour abréger, les dérivées partielles du premier et du second ordre par P, Q, R, S, T : il viendra

$$(4)\qquad \frac{dV}{dt} = P u' + Q v',$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 V}{dt^2} &= P\frac{d^2 u}{dt^2} + Q\frac{d^2 v}{dt^2} + R u'^2 + 2S u'v' + T v'^2 \\ &= \frac{EQ\dfrac{\partial U}{\partial v} - F\left(P\dfrac{\partial U}{\partial v} + Q\dfrac{\partial U}{\partial u}\right) + GP\dfrac{\partial U}{\partial u}}{EG - F^2} + \Phi(u', v'), \end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi(u', v') = \Big\{ R + \frac{1}{EG - F^2}\Big[& P\left(F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\ & + Q\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right)\Big]\Big\} u'^2 \\ + \Big\{ 2S + \frac{1}{EG - F^2}\Big[& P\left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\ & + Q\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right)\Big]\Big\} u'v' \\ + \Big\{ T + \frac{1}{EG - F^2}\Big[& P\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}\right) \\ & + Q\left(F\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\Big]\Big\} v'^2. \end{aligned}\right.$$

Le terme indépendant de u', v', dans l'expression de $\frac{d^2\mathrm{V}}{dt^2}$, n'est autre que l'invariant désigné, dans les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux ([1]), par la notation $\Delta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$.

Faisons usage de l'équation des forces vives

$$\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2 = 2(\mathrm{U} + h),$$

la différence

$$\frac{\Phi(u', v')}{\mathrm{E}u'^2 + 2\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2} - \frac{\Phi(\mathrm{Q}, -\mathrm{P})}{\mathrm{EQ}^2 - 2\mathrm{FPQ} + \mathrm{GP}^2}$$

contenant en facteur $\mathrm{P}u' + \mathrm{Q}v'$, nous pouvons écrire

$$(7) \qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{dt^2} = \Delta(\mathrm{U}, \mathrm{V}) + \frac{2(\mathrm{U} + h)\mathrm{I}_v}{\Delta\mathrm{V}} + \frac{d\mathrm{V}}{dt}(\lambda u' + \mu v'),$$

où λ et μ ne contiennent d'autre dénominateur que la quantité

$$\mathrm{EQ}^2 - 2\mathrm{FPQ} + \mathrm{GP}^2;$$

$\Delta\mathrm{V}$ désigne, conformément aux notations de M. Darboux, le quotient de cette même expression $\mathrm{EQ}^2 - 2\mathrm{FPQ} + \mathrm{GP}^2$ par $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$; I_v a la valeur

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I}_v &= \frac{\Phi(\mathrm{Q}, -\mathrm{P})}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} \\ &= \frac{\mathrm{RQ}^2 - 2\mathrm{SPQ} + \mathrm{TP}^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} + \frac{1}{(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)^2} \\ &\times \Big[\mathrm{P}^3\Big(\frac{1}{2}\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{1}{2}\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\Big) + \mathrm{P}^2\mathrm{Q}\Big(\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} + \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \frac{1}{2}\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} - \frac{3}{2}\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\Big) \\ &+ \mathrm{PQ}^2\Big(\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{1}{2}\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} - \frac{3}{2}\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\Big) + \mathrm{Q}^3\Big(\frac{1}{2}\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} + \frac{1}{2}\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\Big)\Big]. \end{aligned} \right.$$

Cette quantité s'exprime également à l'aide des paramètres différentiels de M. Beltrami. En nous conformant toujours aux notations de

([1]) T. III, Liv. VII, Chap. I.

M. Darboux, nous trouvons successivement

$$\frac{1}{2}\Delta(V, \Delta_2 V) = \frac{1}{(EG - F^2)^2}\Big[(GP - FQ)^2 R + 2(GP - FQ)(EQ - EP)S + (EQ - FP)^2 T$$
$$+ \frac{1}{2}(GP - FQ)\left(\frac{\partial E}{\partial u}Q^2 - \frac{2\,\partial F}{\partial u}PQ + \frac{\partial G}{\partial u}P^2\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(EQ - FP)\left(\frac{\partial E}{\partial v}Q^2 - \frac{2\,\partial F}{\partial v}PQ + \frac{\partial G}{\partial v}P^2\right)\Big]$$
$$+ \frac{\Delta V\, \Delta(V, EG - F^2)}{2(EG - F^2)}.$$

$$\Delta(V, \Delta_2 V) = \frac{EQ^2 - 2FPQ + GP^2}{(EG - F^2)^2}\Big[GR - 2FS + ET + P\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right)$$
$$+ Q\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{1}{2}\Delta(V, EG - F^2)\Big],$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad I_V = \Delta V\, \Delta_2 V - \frac{1}{2}\Delta(V, \Delta V).$$

7. Faisons d'abord $V = U$: il viendra

$$(9) \qquad \frac{d^2 U}{dt^2} = \Delta U + \frac{2(U + h) I_U}{\Delta U} + \frac{dU}{dt}(\lambda u' + \mu v').$$

Considérons un maximum de U. Nous devrons avoir $\frac{dU}{dt} = 0$, $\frac{d^2 U}{dt^2} \leq 0$: comme ΔU est essentiellement positif, il en résulte

$$(10) \qquad I_U \leq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $\Delta U = 0$, c'est-à-dire en une position d'équilibre.

Réciproquement, étant donné un point quelconque situé dans la région $I_U < 0$, il existe une trajectoire passant en ce point et y admettant un maximum de la fonction U. Car on peut prendre u' et v' proproportionnels à Q et $-P$, ce qui rend la fonction $\Phi(u', v')$ négative, puis donner à ces quantités u', v' des valeurs assez grandes pour que ce terme $\Phi(u', v')$ surpasse en valeur absolue ΔU.

Si nous divisons la surface donnée en deux régions, l'une où I_U est

positif, l'autre où il est négatif, une trajectoire quelconque passera, en général, une infinité de fois dans la seconde de ces deux régions, à laquelle on peut, en conséquence, donner le nom de région *attractive*, pendant que la première, dans laquelle le point mobile ne peut rester constamment, est en quelque sorte une région *répulsive*.

Ainsi que l'a remarqué M. Kneser dans le cas où la surface donnée est un plan ([1]), le maximum de U ne peut avoir lieu que là où *les lignes de niveau ont leur courbure géodésique tournée dans le sens des U croissants*. Ce résultat est équivalent à celui qui précède, comme on le voit en introduisant l'expression de cette courbure géodésique ([2]), expression dont le numérateur est précisément I_U.

La ligne de séparation des régions attractive et répulsive est constituée par le lieu des inflexions géodésiques des courbes de niveau, c'est-à-dire, d'une part, par les points où la courbe de niveau est tangente à une direction asymptotique ([3]); d'autre part, par les points où son plan osculateur est normal à la surface. Par exemple, dans le cas de la pesanteur, cette ligne de séparation se compose du contour apparent horizontal et du lieu des points où une direction asymptotique est horizontale.

8. Il est intéressant de comparer le résultat précédent avec celui que l'on rencontre dans le cas d'un paramètre, par exemple dans le mouvement d'un point sur une courbe sous l'influence d'une force fonction de la position du point. On sait qu'alors le mobile, s'il ne s'éloigne pas indéfiniment dans un sens déterminé, oscille périodiquement dans un certain intervalle et que cet intervalle comprend nécessairement une position d'équilibre stable. Dans le cas de deux paramètres, c'est la région attractive qui remplace, à cet égard, la position d'équilibre stable ([4]).

([1]) *Loc. cit.*

([2]) Darboux, *loc. cit.*, t. III, p. 202, formule (19).

([3]) Cette propriété caractéristique des lignes asymptotiques que les courbes qui leur sont tangentes avec un plan osculateur quelconque ont leur courbure géodésique nulle, est en relation évidente avec le rôle que jouent ces lignes dans la théorie de la déformation.

([4]) La question, plusieurs fois discutée (*voir*, en particulier, Jordan, *Comptes*

9. Nous avons supposé que la fonction U avait des maxima en nombre infini. Nous devons maintenant examiner le cas où, à partir d'une certaine valeur de t, U varierait constamment dans le même sens. Pour voir ce qui peut se passer dans ces conditions, nous ferons, comme précédemment, certaines hypothèses. Nous admettrons :

1° Que U est, sur toute la surface, fini et inférieur en valeur absolue à une limite déterminée, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclusivement;

2° Que E, F, G restent également partout finis et inférieurs en valeur absolue à une limite déterminée ainsi que leurs dérivées jusqu'au second ordre inclusivement;

3° Que $EG - F^2$ est partout différent de zéro et supérieur à une limite déterminée.

Sous la forme où nous venons de les énoncer, ces hypothèses sont trop restrictives et ne seraient pas réalisées en général. Ainsi, pour prendre le cas le plus simple, une sphère rapportée aux coordonnées astronomiques ordinaires ne satisferait pas aux conditions précédentes, $EG - F^2$ étant nul aux deux pôles. Nous ferons abstraction de ces singularités apparentes, en supposant qu'on ait défini un certain nombre de régions empiétant les unes sur les autres, de manière que : 1° tout point de la surface soit intérieur à l'une au moins de ces régions; 2° dans chacune d'elles on puisse faire choix d'un système de coordonnées tel que les conditions précédentes soient vérifiées. Si ces résultats ne peuvent être atteints qu'après séparation d'une ou plusieurs portions de la surface donnée, celles-ci seront véritablement singulières et nous les exclurons du raisonnement, en ne considérant que les trajectoires qui n'y passent point. C'est ce qui arrivera, par exemple s'il y a des nappes infinies.

Dans ces conditions, nous sommes assurés tout d'abord que u' et v' restent finis. Les singularités signalées par M. Painlevé [1] sont donc

---

rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXIV, LXXV; Boussinesq, *ibid.*), des lignes de faîte et des thalwegs trouverait peut-être sa solution dans des considérations analogues aux précédentes : les lignes de faîte étant en quelque sorte les lignes répulsives par excellence et les thalwegs les lignes attractives par excellence.

[1] *Comptes rendus*, 26 octobre 1896.

exclues et il y a lieu de faire varier t jusqu'à $+\infty$. De plus, $\frac{dU}{dt}$, $\frac{d^2U}{dt^2}$ et $\frac{d^3U}{dt^3}$ restent finies et, par conséquent, d'après le lemme précédemment démontré, si U tend vers une limite, $\frac{dU}{dt}$ et $\frac{d^2U}{dt^2}$ tendent vers zéro. Si nous envisageons alors la formule (9), nous voyons que si ΔU n'est pas très petit, λ et μ sont finis, de sorte que le dernier terme du second membre est infiniment petit. Dès lors, ou bien il existe des valeurs de t aussi grandes que l'on veut pour lesquelles $I_t < 0$ et alors nous n'avons pas à modifier les conclusions des numéros précédents; ou bien ΔU tend vers zéro. Or les identités

$$E\Delta U = \frac{(EQ - FP)^2}{EG - F^2} + P^2, \qquad G\Delta U = \frac{(GP - FQ)^2}{EG - F^2} + Q^2$$

montrent que ΔU ne peut tendre vers zéro s'il n'en est pas de même de P et de Q. Si donc, comme c'est le cas général, la surface ne renferme qu'un nombre fini de positions d'équilibre, le mobile devra tendre vers une de ces positions. Dès lors la vitesse tend vers zéro, ainsi que l'a démontré M. Painlevé [1]; c'est d'ailleurs ce qui résulte de notre lemme, appliqué aux coordonnées u et v considérées comme fonctions de t.

En un mot, *lorsque, sur une surface régulière et où U se comporte partout régulièrement, il n'y a qu'un nombre fini de positions d'équilibre, toute trajectoire qui ne passe pas une infinité de fois dans la région attractive tend asymptotiquement vers une de ces positions.*

10. Si l'on considérait, non seulement les valeurs de t supérieures à t_0, mais l'ensemble des valeurs de t de $-\infty$ à $+\infty$, on peut affirmer sans restriction que, pour une au moins de ces valeurs, le mobile passera dans la région attractive. Car le contraire ne pourrait avoir lieu que si la trajectoire tendait asymptotiquement vers une position

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France* et *Leçons sur l'intégration des équations de la Dynamique.*

d'équilibre tant pour t infini positif que pour t infini négatif. Mais, dans ce cas, les valeurs de U correspondant à ces deux positions limites seraient les mêmes et seraient atteintes par valeurs décroissantes (puisque la force vive tendrait vers zéro). Donc, dans l'intervalle, M passerait nécessairement par un maximum.

Une position d'équilibre ainsi atteinte asymptotiquement est nécessairement instable. Car on peut donner à t une valeur t_0 assez grande pour que le mobile prenne une position aussi voisine qu'on veut de l'équilibre avec une vitesse (u'_0, v'_0) aussi petite qu'on veut; on sait, d'autre part, que, dans un mouvement quelconque compatible avec la loi de forces donnée, on peut changer t en $t_0 - t$: le mouvement ainsi transformé est évidemment en contradiction avec l'hypothèse de la stabilité.

11. Si les positions d'équilibre, au lieu d'être en nombre fini, formaient sur la surface une ou plusieurs lignes, la conclusion précédente ne subsisterait pas nécessairement. La trajectoire pourrait être asymptotique à une ligne d'équilibre sans que la vitesse tende vers zéro; mais un pareil fait est loin de pouvoir se produire pour une ligne d'équilibre quelconque. Soit, en effet, $f(u, v) = 0$ l'équation de la ligne d'équilibre, f étant une fonction dont les dérivées partielles p et q ne sont pas nulles toutes deux en un point quelconque de cette ligne. [Par exemple, sur le tore à axe vertical représenté en coordonnées semi-polaires r, θ, z par l'équation $z^2 + (r - a)^2 = b^2$, si la force agissante est la pesanteur, on pourra prendre $f = r - a$.]

$\frac{df}{dt}$ et $\frac{d^2 f}{dt^2}$ tendront vers zéro d'après notre lemme du n° 4, et comme il en est de même de $\Delta(U, f)$, si la vitesse ne tend pas vers zéro, il en résulte $\lim \mathrm{I}_f = 0$, ce qui exige que I_f soit nulle sur la courbe d'équilibre. Δf étant différent de zéro, *cette ligne doit être une géodésique de la surface*, d'après l'expression précédemment rappelée de la courbure géodésique.

12. Notre théorème n'apprend quelque chose que si la région répulsive existe. Il est aisé de voir qu'il en est ainsi en général. Supposons, en effet, U partout fini sur la surface : il aura un maximum

(position d'équilibre stable) et un minimum. Si ce maximum et ce minimum sont isolés, le premier sera intérieur à la région attractive, le second à la région répulsive; car, autour d'un point u_0, v_0 où il est minimum, U aura un développement de la forme

$$a(u-u_0)^2+2b(u-u_0)(v-v_0)+c(v-v_0)^2+\ldots$$

avec

$$b^2-ac<0,\ a>0.$$

Si l'on forme l'expression I_t, on voit que la partie

$$RQ^2-2SPQ+TP^2=aQ^2-2bPQ+cP^2+\ldots$$

est du second degré et essentiellement positive autour du point (u_0, v_0) pendant que la partie restante est de degré supérieur au second. Quant à ce point lui-même, il fait partie, comme point isolé, de la courbe $I_t=0$, mais on peut le considérer comme appartenant à la région répulsive, puisque toute trajectoire passant en ce point y admet un minimum de U.

Là encore, les conclusions peuvent être toutes différentes s'il existe pour U une ligne de minima ou de maxima. Ainsi, lorsqu'un point mobile sur une sphère est attiré par un diamètre, il est clair que la concavité des lignes de niveau est partout dirigée dans le sens de la force; il n'y a donc pas de région répulsive. Cela tient à l'existence d'une ligne de minima pour U, le grand cercle perpendiculaire au diamètre attirant.

13. On remarquera que si l'on change U en $-$U, c'est-à-dire *si l'on passe du mouvement primitif à son conjugué*, I_t est changé en $-I_t$, de sorte que *les régions attractive et répulsive se permutent entre elles.*

14. Si nous connaissons une limite supérieure de la constante des forces vives, nous pouvons restreindre la région attractive, car, moyennant l'inégalité $h \leq h_0$, notre formule (9) donne, en un maxi-

mum de U,

$$(11) \qquad \Delta U + \frac{2(U+h_0)I_U}{\Delta U} \leqq 0,$$

qui, avec $U + h_0 \geqq 0$, définit une région de la surface, région manifestement comprise dans la première.

De même, si nous connaissons une limite inférieure de la constante des forces vives, nous connaîtrons par là même une région où devra se trouver le minimum de U, car les relations $\frac{dU}{dt} = 0$, $\frac{d^2U}{dt^2} \geqq 0$, $h \geqq h_0$, combinées avec la formule (9), donnent

$$\Delta U + \frac{2(U+h_0)I_U}{\Delta U} \geqq 0,$$

région qui comprend la région répulsive et une partie de la région attractive, cette dernière partie diminuant indéfiniment lorsque h_0 augmente indéfiniment.

15. Soit maintenant V quelconque, et supposons donnée la valeur de la constante des forces vives; dès lors, les inégalités

$$(12) \qquad \Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V} \leqq 0,$$

$$(13) \qquad \Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V} \geqq 0$$

correspondent à une division de la surface en deux régions telles que tout maximum de V est nécessairement situé dans l'une, tout minimum dans l'autre.

Quant à la discussion du cas où V n'a pas une infinité de maxima et de minima, elle se fait d'après les principes invoqués précédemment. En supposant encore que V reste fini ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, il faudra que la trajectoire tende vers une certaine courbe limite $V = a$. De plus, la condition que $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ soient infiniment petits nous montre, d'après la formule (7), que $\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V}$ tend vers zéro, à moins que ΔV et, par suite,

$\frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial v}$ ne soient eux-mêmes infiniment petits. Mais si cette dernière circonstance se produisait, il arriverait ou bien que $\frac{\partial V}{\partial u}$ et $\frac{\partial V}{\partial v}$ ne seraient nuls qu'en des points isolés de la courbe $V = a$, et alors le mobile devrait s'approcher indéfiniment d'un de ces points, qui devrait être une position d'équilibre instable ([1]), ou bien que les égalités $\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v} = 0$ auraient lieu sur toute la courbe limite, auquel cas nous remplacerions V par une autre fonction s'annulant sur la courbe $V = a$ sans que ses dérivées partielles soient nulles toutes deux. Reste l'hypothèse que $\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V}$ tende vers zéro sur la trajectoire et, par suite, soit nul sur la courbe limite : alors celle-ci sera une trajectoire possible $\left(\text{puisque les conditions } V = a, \frac{dV}{dt} = 0 \text{ entraînent } \frac{d^2V}{dt^2} = 0\right)$.

Ainsi, *toute trajectoire sur laquelle* V *et ses dérivées partielles restent finies passera une infinité de fois dans chacune des deux régions* (12) *et* (13) et traversera, par conséquent, une infinité de fois leur ligne de séparation, *à moins qu'elle ne tende asymptotiquement vers une position d'équilibre instable ou vers une trajectoire fermée représentée par une équation de la forme* $V = a$.

16. On peut déduire du résultat précédent un autre qui soit indépendant de la valeur de la constante des forces vives, car l'équation $\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V} = 0$, combinée avec l'inégalité $U + h > 0$, donne

$$\Delta(U, V)\, I_V < 0,$$

inégalité qui doit être vérifiée une infinité de fois sur toute trajectoire non exceptionnelle.

17. Prenons le cas des géodésiques. En faisant $U = 0$, nous voyons que, sur une géodésique, le maximum de V a lieu nécessairement

([1]) *Voir* Painlevé, *loc. cit.*

dans la région $I_V < 0$, le minimum dans la région $I_V > 0$: toute géodésique passera une infinité de fois dans chacune de ces deux régions, à moins qu'elle ne soit asymptotique à une géodésique fermée ayant pour équation $V = a$.

Ce résultat est en accord avec celui que nous avons établi en premier lieu (n° **7**), car on sait que les géodésiques peuvent être considérées comme les trajectoires limites d'un mobile qui se meut sous l'influence de forces dérivées d'un potentiel quelconque $\pm V$.

On peut, d'ailleurs, déduire tous les résultats précédents les uns des autres en partant des résultats que fournit le principe de la moindre action. Ce principe montre, en effet, que les géodésiques de l'élément linéaire $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ sont identiques aux trajectoires d'un mobile parcourant la surface d'élément linéaire

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{V}$$

sous l'action des forces dérivées du potentiel V. De même, on ne change pas les trajectoires en remplaçant simultanément l'élément linéaire $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ par $(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)\frac{U}{V}$ et la fonction de forces U par V. Cette transformation permet de passer des résultats du n° **7** à ceux du n° **15**.

18. Si, en particulier, $V = 0$ est l'équation d'une géodésique fermée L, la quantité I_V est nulle tout le long de cette ligne. Si elle n'est pas nulle ailleurs, la ligne L devra être coupée une infinité de fois par toute autre géodésique.

Nous allons appliquer cette remarque en prenant pour V la distance géodésique d'un point de la surface à la ligne L et supposant que la courbure de la surface donnée garde un signe invariable.

Prenons pour coordonnées l'arc v de L, compté à partir d'une origine fixe jusqu'au pied d'une géodésique normale à la première, et l'arc u de cette dernière géodésique, compté à partir de son pied. L'élément linéaire sera $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$ et, pour $u = 0$, l'on aura $C = 1$, $\frac{\partial C}{\partial u} = 0$. Si nous prenons pour V la quantité u elle-même, la formule (8) donnera $I_u = \frac{\partial C}{\partial u}$, lequel est bien nul sur L.

Supposons maintenant que la surface donnée soit à courbure partout positive. Comme cette courbure a pour expression [1]

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2},$$

la quantité $\frac{\partial C}{\partial u}$, qui est nulle avec u et croissante quand u décroît, a un signe contraire à celui de u. La valeur absolue de u ne peut donc avoir de minimum autre que zéro, et par conséquent, *sur une surface à courbure partout positive, toute géodésique fermée est coupée une infinité de fois par toute autre géodésique.*

19. Toutefois, la démonstration ainsi présentée est loin d'être irréprochable, car nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que la fonction V était univoque et avait ses deux premières dérivées déterminées et continues, et il est clair que ces propriétés n'appartiennent pas à la quantité u dont il vient d'être question. Non seulement, lorsqu'un point M' se déplace sur une ligne L', la géodésique le long de laquelle est comptée la distance minima de ce point à une ligne fermée L ne varie pas toujours continûment; mais il peut même arriver qu'il soit impossible de considérer comme variant continûment une géodésique, menée par le point M' normalement à L. Si, par exemple, on prend sur l'équateur d'une sphère un arc AB plus petit qu'une demi-circonférence et qu'on remplace le reste de la circonférence par une ligne ayant avec celle-ci, en A et B, un contact d'ordre aussi élevé qu'on voudra mais située tout entière dans l'hémisphère supérieur, on fournira ainsi une ligne fermée L; lorsqu'un point M', variable sur une ligne L', passe au pôle supérieur, le pied de la géodésique normale à L, menée par ce point, passe brusquement de A en B.

Nous ne serons donc en droit d'affirmer la proposition précédente qu'après avoir examiné les objections auxquelles donnent lieu de telles singularités.

20. Nous admettrons, comme nous sommes en droit de le faire,

---

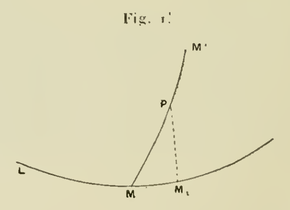
(1) DARBOUX, *Leçons*, t. II, p. 416, formule (24).

d'après les principes établis dans les *Leçons* de M. Darboux, qu'entre deux points quelconques de la surface existe un chemin minimum. La longueur de ce chemin sera évidemment une fonction continue de la situation de chacun des deux points. Nous admettrons, en outre, que pour toute géodésique déterminée par un de ses points (de coordonnées curvilignes α, β) et par l'angle ω, qui définit sa direction en ce point, les coordonnées (soit curvilignes, soit cartésiennes) de l'extrémité d'un arc s, compté à partir du point (α, β), sont des fonctions de α, β, ω, s continues et admettant des dérivées partielles jusqu'à un ordre suffisamment élevé; c'est ce qui a lieu, moyennant des hypothèses très simples sur la nature de la surface, d'après les travaux de MM. Poincaré et Picard.

Dans ces conditions, la distance géodésique minima d'un point déterminé quelconque M' de la surface à un point variable M de la ligne fermée L, variant continûment avec M, aura une valeur minima. A ce moment, la géodésique MM' sera normale à L. Cela est hors de contestation dans le cas général où, en remplaçant cette géodésique MM' par une autre de même longueur, mais faisant avec la première, au point M', un angle infiniment petit, la position du point M est altérée d'un infiniment petit du même ordre; mais le contraire peut se présenter : c'est ainsi que, sur une sphère, on peut mener une infinité d'arcs de grands cercles différents et ayant pour extrémité commune le point diamétralement opposé au premier.

Pour montrer, dans tous les cas, que MM' est normale à L, il suffit

Fig. 1.



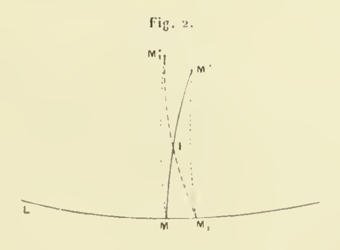
de prendre sur MM' un point P suffisamment rapproché de M pour qu'une géodésique issue de P, et infiniment voisine de MM', ne puisse couper celle-ci sur l'arc PM ni dans le voisinage de M. Alors la singu-

larité qui pouvait se produire pour les géodésiques issues de M′ ne peut avoir lieu pour les géodésiques issues de P : si donc PM n'était pas normale à L (*fig.* 1), il y aurait nécessairement, dans le voisinage de M′, sur le segment de L qui fait avec MM′ un angle aigu, un point M_1 tel que sa distance à P soit plus petite que PM. Le chemin $M'PM_1$ serait donc, contrairement à l'hypothèse, plus court que M′M.

21. M′M étant la plus courte distance géodésique du point M à la ligne L, on pourra en général trouver, de part et d'autre du point M, deux points N, N_1 tels que les distances M′N, $M'N_1$ soient plus grandes que M′M. Si donc nous considérons un point M'_1 suffisamment voisin de M, les longueurs géodésiques M'_1N, M'_1N_1 seront plus grandes que M'_1M, et la distance de M'_1 à un point variable de L aura un minimum M'_1M_1 (qui pourra n'être qu'un minimum relatif) en un point M_1 situé entre N et N_1. Par le point M'_1 passera donc une géodésique normale à L et voisine de M′M. On voit que cette conclusion n'est en défaut que si au point M est attenant un certain segment de L dont tous les points sont à la même distance du point M′. C'est d'ailleurs ce qui peut arriver, comme nous l'avons vu tout à l'heure par l'exemple de la sphère.

Ces géodésiques, normales à L et voisines de MM′, ne couperont d'ailleurs pas l'arc MM′; car, si les arcs géodésiques MM′, M'_1M_1 se

Fig. 2.



coupaient en I (*fig.* 2), la distance M_1M' serait plus petite que MM′ ou la distance MM'_1 plus petite que $M_1M'_1$, suivant qu'on aurait

$IM_1 \leqq IM$ ou $IM \leqq IM_1$. De même, ces géodésiques ne se couperont pas entre elles dans leurs segments voisins de MM'.

22. Soit maintenant M' un point situé sur une ligne L' et dont la distance à L est minima par rapport aux points voisins de L'. Nous verrons, comme tout à l'heure, que MM' est normale à L'. Il en résulte tout d'abord qu'il ne peut exister une infinité de géodésiques égales à MM' et allant du point M à la ligne L, car l'une au moins de ces lignes ne serait pas normale à L'. Donc, chaque point de l'entourage de M' pourra être joint à L par une géodésique normale voisine de M'M. Reprenons alors le système de coordonnées précédemment considérées, tel que u soit la distance du point (u, v) à la ligne L. L'élément linéaire de la surface sera $du^2 + C^2 dv^2$ où, d'après nos hypothèses, la fonction C admettra, au voisinage du point M', des dérivées jusqu'à un ordre déterminé.

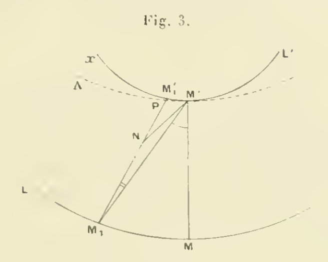
Supposons C différent de zéro en M'. Alors la courbe Λ, lieu des extrémités d'arcs M_1P égaux à MM' et portés à partir de L sur les géodésiques normales à L, autrement dit la courbe parallèle à L passant par M', sera une ligne normale à MM' et à laquelle les formules connues ([1]) assigneront une courbure finie, ainsi que sa dérivée par rapport à l'arc; et, par conséquent, la distance d'un point quelconque de L' à cette ligne (c'est-à-dire $u -$ MM') aura une dérivée et une dérivée seconde en M'. Notre raisonnement est dès lors applicable sans objection.

Quant à l'hypothèse $C = 0$ (au point M'), elle est incompatible avec la propriété de minimum supposée à MM'. En effet, la courbe Λ doit, d'une part, être située du même côté de L' que le segment M'M et, d'autre part, être normale à ce dernier, ainsi qu'on le verrait comme précédemment. Si C était nul en M', une géodésique normale à L en un point M_1 (*fig.* 3), distant de M d'un infiniment petit du premier ordre, et égale à MM', aurait pour extrémité un point P distant de M' d'un infiniment petit du second ordre (au moins). En supposant que la géodésique M_1 est abaissée d'un point M'_1 de L', nous voyons que les distances PM'_1 et, par suite, $M'M'_1$, seraient également du second

([1]) DARBOUX, *Leçons*, Liv. V, Chap. II, Tableaux II et IV.

ordre. Je dis que la ligne $M'M'_1$ fait avec la ligne L′, prise dans le sens $M'x$ qui s'éloigne de M′, un angle aigu.

Fig. 3.



En effet, tout d'abord, nous savons que la ligne M'_1M_1 ne coupe pas MM′. Joignons $M'M_1$. L'angle $\widehat{M_1M'M}$ est infiniment petit du premier ordre, et l'angle $\widehat{M'M_1M'_1}$ du second ou, du moins, s'il n'en est pas ainsi, on pourra trouver sur $M_1M'_1$ un point N tel que l'angle $\widehat{M'_1NM'}$ soit du second ordre. Il en sera, par suite, de même de la différence entre les angles $\widehat{NM'x}$ et $\widehat{NM'_1x}$. Le premier de ces angles différant de l'angle droit d'un infiniment petit du premier ordre, le second est bien aigu. Dès lors, la distance du point M'_1 à la ligne L devrait être décroissante quand ce point s'éloigne de M′, ce qui est impossible.

L'hypothèse $C = 0$ doit donc être écartée et la validité de notre raisonnement est assurée.

Nous avons toutefois à nous demander si une géodésique de la surface ne pourrait pas être asymptotique à L. La théorie générale des solutions asymptotiques montrerait qu'il n'en peut être ainsi ; mais c'est ce qui résulte également des notions précédentes, car si u devait tendre vers zéro par valeurs positives, par exemple, $\frac{du}{dt}$ devrait tendre vers zéro par valeurs négatives et, par conséquent, $\frac{d^2u}{dt^2}$ devrait être positif pour des valeurs très grandes de t : ce qui ne peut avoir lieu, ainsi que nous venons de le montrer.

Il est donc établi que la ligne L est coupée une infinité de fois par toute autre géodésique. En particulier, une surface à courbure partout positive ne peut avoir deux géodésiques fermées qui ne se rencontrent pas.

25. Ce dernier résultat, au moins s'il s'agit de géodésiques sans points doubles, est susceptible d'une autre démonstration très simple. Si, en effet, nous admettons que la surface est simplement connexe, deux géodésiques fermées ne se rencontrant pas devraient comprendre entre elles une aire à laquelle la relation de Bonnet (1) assignerait une courbure totale nulle, ce qui ne se peut.

Or une surface à deux côtés et sans points singuliers, à courbure partout positive (la valeur zéro et les valeurs infiniment petites étant exclues) est toujours simplement connexe.

Pour le démontrer, nous considérerons la représentation sphérique. La surface étant à deux côtés, à chacun de ses points correspond une représentation sphérique bien déterminée. Si la surface est d'ailleurs quelconque, cette représentation sphérique pourra être à plusieurs feuillets. Ces feuillets pourront se raccorder les uns aux autres de diverses façons : par exemple, ils pourront se joindre par un bord commun, de manière à former par leur ensemble un pli : c'est ainsi qu'une surface de révolution dont la méridienne présente une inflexion aura une représentation sphérique pliée en deux, suivant le cercle qui correspond au parallèle d'inflexion. Dans ce cas, le sens des aires sphériques et, par suite, le signe de la courbure totale change évidemment quand on passe d'un feuillet à l'autre.

Si, d'autre part, la courbure s'annule, même sans changer de signe, la représentation sphérique peut présenter certains points singuliers influant sur le mode de raccordement des feuillets. Mais lorsque, conformément à nos hypothèses actuelles, on suppose la courbure toujours supérieure à un nombre positif déterminé, il n'en peut être ainsi. Si M est un point quelconque de la surface et m sa représentation sphérique, une petite région de la surface entourant le point M est représentée par une petite région de sphère recouvrant une seule

(1) Darboux, *Leçons*, t. III, p. 126.

fois l'entourage du point m, et le rapport des étendues de ces deux régions varie entre deux limites finies. De plus, tout point de la sphère sert de représentation sphérique à un point de la surface : autrement dit, la représentation sphérique n'a pas de bord, car, puisque le rapport des aires correspondantes reste fini, un pareil bord devrait correspondre à un bord de la surface.

Il est aisé d'en conclure que la représentation sphérique se compose d'un seul feuillet. Si, en effet, m et m' étaient deux points superposés de cette représentation sphérique, correspondant à deux points distincts M et M' de la surface, à une ligne L, joignant ces derniers, correspondrait une ligne l, joignant les deux représentations sphériques, et, en l'absence de toute singularité, cette ligne pourrait être déformée jusqu'à être infiniment petite, ce qui est absurde.

La représentation sphérique recouvre donc simplement la sphère entière et est, par suite, simplement connexe ; il en est de même de la surface donnée qui lui équivaut au point de vue de la géométrie de situation.

L'étude des surfaces à courbures opposées, relativement auxquelles on obtient des résultats beaucoup plus complets que les précédents, fera l'objet d'un travail ultérieur.

24. On peut, dans certains cas, restreindre la région attractive en appliquant le théorème à une trajectoire déterminée, issue d'un point donné. En ce point, la fonction V, supposée croissante pour fixer les idées, a une certaine valeur V_0 et le premier maximum de V devra être au moins égal à V_0. Nous pourrons donc affirmer que la trajectoire (toujours sauf le cas d'asymptotisme ou celui de V infini) passe non seulement dans la région donnée par l'inégalité (12), mais dans la partie de cette région où V est supérieur à V_0.

Cette remarque se distingue, comme on le voit, des précédentes en ce qu'elle donne des conclusions différentes pour les différentes trajectoires compatibles avec la même loi de force, et cela indépendamment de toute intégrale connue.

Elle peut d'ailleurs être appliquée à plusieurs reprises par l'introduction de deux fonctions V et V_1. La considération du maximum de V permet de délimiter une région R où toute trajectoire doit passer

une infinité de fois. Dans cette région, V_1 a un maximum M_1; dès lors toute trajectoire doit passer dans la fonction R_1 de la région

$$\Delta(U, V_1) + \frac{2(U+h)I_{V_1}}{\Delta V_1} \leqq 0,$$

où V_1 est supérieur à M_1. Dans cette nouvelle région R_1, la fonction V a un maximum M′ et toute trajectoire devra passer une infinité de fois dans la portion R′ de la région R où V est supérieur à M′, etc.

25. Il est à remarquer qu'on peut aussi obtenir des renseignements sur le signe de $\frac{d^2V}{dt^2}$ sans faire intervenir la condition $\frac{dV}{dt} = 0$. Le rapport $\frac{\Phi(u', v')}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$ reste, en effet, lorsque u' et v' varient, compris entre deux limites fixes λ_1 et λ_2. Si donc les sommes $\frac{\Delta(U, V)}{U+h} + \lambda_1$ et $\frac{\Delta(U, V)}{U+h} + \lambda_2$ sont de même signe, ce signe sera celui de $\frac{d^2V}{dt^2}$.

Il est clair que cette circonstance se présentera, en particulier, en tout point de la surface où V est maximum ou minimum absolu, et par conséquent, en général, aux environs d'un tel point; et, en effet, la forme $\Phi(u', v')$ est alors définie et l'on a, de plus, $\Delta(U, V) = 0$.

26. L'expression $\frac{\Phi(u', v')}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$ et, par suite, les quantités λ_1, λ_2 sont, d'ailleurs, susceptibles d'une expression géométrique très simple. Si, en effet, on suppose $U = 0$, t étant alors l'arc s d'une géodésique, on voit que le rapport en question représente la dérivée $\frac{d^2V}{ds^2}$, prise sur la géodésique de direction (u', v'). Si, d'ailleurs, on décompose le dénominateur en carrés, de manière à avoir

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

moyennant quoi la forme $\Phi(u', v')$ peut s'écrire

$$\Phi(u', v') = \varphi(\xi, \eta),$$

ξ et η représenteront des coordonnées rectangulaires dans le plan tan-

gent à la surface, et l'équation

$$\varphi(\xi, \eta) = 1$$

sera celle d'une conique, lieu de l'extrémité d'une longueur $\dfrac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{d^2V}{ds^2}}}$ portée sur la tangente à la géodésique. Les nombres λ_1 et λ_2 sont les inverses des carrés des axes de cette conique.

L'équation qui détermine λ_1, λ_2, exprimée à l'aide des paramètres de Beltrami, est

$$\lambda^2 - \lambda\Delta_2 V + \frac{2\Delta(V, \Delta V)\Delta_2 V - \Delta\Delta V}{4\Delta V} = 0;$$

on voit, en particulier, que *la somme des valeurs de* $\dfrac{d^2V}{ds^2}$ *sur deux géodésiques rectangulaires quelconques est constante et égale à* $\Delta_2 V$.

27. Notre proposition fondamentale peut être considérée comme fournissant un moyen de transformation des expressions différentielles qui interviennent dans la théorie des géodésiques. Par exemple, nos calculs donnent une démonstration de ce fait, utilisé précédemment, que l'équation $I_V = 0$, vérifiée sur la ligne $V = a$, exprime la condition pour que cette ligne soit une géodésique; puisque, moyennant cette condition, les relations $V = a$, $\dfrac{dV}{dt} = 0$ entraînent (sur la géodésique) $\dfrac{d^2V}{dt^2} = 0$. On en déduirait même sans difficulté l'expression de la courbure géodésique d'une ligne quelconque $V = a$, puisque celle-ci dépend de la dérivée $\dfrac{d^2\delta}{ds^2}$, δ désignant la distance à cette ligne d'un point de la ligne géodésique tangente, distance sensiblement égale à $\dfrac{V - a}{\dfrac{dV}{dn}}$.

28. Nous pourrons encore former aisément la quantité I_V lorsque la surface est donnée par son équation cartésienne

$$(14) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

V étant alors une fonction des coördonnées x, y, z. Il nous suffira pour cela de reprendre, dans cette nouvelle hypothèse, nos calculs primitifs en écrivant tout d'abord les équations du mouvement d'un point sur la surface. Nous supposerons la masse du point égale à 1, et nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

d'où (x', y', z' désignant les composantes de la vitesse)

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2V}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} \\ &\quad + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}x'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}z'^2 \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}y'z' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}z'x' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}x'y', \end{aligned}\right.$$

et λ est déterminé par la condition

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2f}{dt^2} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'^2 \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}y'z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}z'x' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}x'y' \\ &\quad + \lambda\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Nous trouvons donc bien l'expression de $\frac{d^2V}{dt^2}$ comme se composant de deux termes

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta(U, V) &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} \\ &\quad \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \end{aligned}\right.$$

indépendant des vitesses, l'autre

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\psi(x', y', z')\\
&\quad = \Phi(u', v')\\
&\quad = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}x'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}z'^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}y'z' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}z'x' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}x'y'\\
&\quad - \frac{\left[\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}y'z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}z'x' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}x'y'\right)\\ &\qquad\times\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\end{aligned}\right]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},
\end{aligned}\right.$$

quadratique par rapport à ces vitesses.

Nous aurons enfin I_V en supposant

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' + \frac{\partial V}{\partial z}z' = 0,$$

d'où

$$\frac{x'}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{y'}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{z'}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}}$$

et

$$\frac{\psi(x', y', z')}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{\psi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2};$$

le dénominateur du premier membre représente la force vive, celui du second membre est égal à $\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]\Delta V$, d'après la formule (16). On a donc finalement

$$(18)\quad I_V = \frac{\psi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

résultat qu'on déduirait également, bien entendu, des formules de Beltrami [1].

---

(1) DARBOUX, *Leçons*, n° 679, t. III.

La fonction f étant donnée, la fonction $I_v = 0$ est l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui coupent les surfaces $f =$ const. suivant des lignes géodésiques.

Si, par exemple, la surface considérée est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'axe des z étant supposé vertical descendant, les formules deviennent, pour $V = \lambda x + \mu y + \nu z$,

$$(19) \quad \Phi(u', v') = \psi(x', y', z') = -\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right) \frac{\left(\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2}\right)}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

$$(20) \qquad I_v = -\sum \frac{1}{a^2}\left(\frac{\mu z}{c^2} - \frac{\nu y}{b^2}\right)^2 \frac{\left(\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2}.$$

La ligne $I_z = 0$ se réduit à la section principale horizontale qui, nous le savions déjà, doit être coupée par toute géodésique, en sa qualité de géodésique fermée. De plus, un point pesant mobile sur la surface passera toujours dans l'hémisphère inférieur (sauf le cas d'asymptotisme à la position d'équilibre instable).

Plus généralement, toute géodésique coupe toute section diamétrale, celle-ci pouvant toujours être considérée comme contour apparent de la surface relativement à une direction convenablement choisie.

Quant aux trajectoires des mobiles pesants, obtenues en prenant $U + h = g(z + k)$, elles passent dans la région attractive définie par l'inégalité (11), soit

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^2 - \frac{2(z+k)z(c^2 - z^2)}{a^2 b^2 c^4} \leqq 0.$$

De plus, si nous prenons $V = \lambda x + \mu y$, nous voyons que toute trajectoire devra couper la courbe $\Delta(U, V)\Delta V + 2(U + h) I_v = 0$.

soit ici

$$\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\mu y}{b^2}\right)\left\{\frac{z}{c^2}\left[(\lambda^2+\mu^2)\frac{z^2}{c^4}+\left(\frac{\lambda y}{b^2}-\frac{\mu x}{a^2}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.+2(z+k)\left[\left(\frac{\lambda^2}{b^2}+\frac{\mu^2}{a^2}\right)\frac{z^2}{c^4}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\lambda y}{b^2}-\frac{\mu x}{a^2}\right)^2\right]\right\}=0.$$

Soient $\alpha > \beta > \gamma$ les axes de l'ellipsoïde rangés par ordre de grandeur. Si les quantités $\frac{z}{c^2}+\frac{2(z+k)}{\alpha^2}$ et $\frac{z}{c^2}+\frac{2(z+k)}{\gamma^2}$ sont de même signe pour $z+k>0$, $c^2-z^2>0$, ce qui arrivera lorsque k sera négatif ou, au contraire, supérieur à $c+\frac{\alpha^2}{2c}$, le facteur entre crochets dans le premier membre de l'équation ci-dessus ne pourra s'annuler et, par conséquent, pour les valeurs correspondantes de la constante des forces vives, la trajectoire coupera tout vertical de la surface.

Sur l'hyperboloïde à une nappe, la ligne $I_{\lambda x+\mu y+\nu z}=0$ ne se composera pas toujours uniquement du contour apparent relatif à la direction (λ, μ, ν), mais comprendra également les sections par les plans tangents de mêmes cosinus directeurs, puisque ces sections sont des lignes asymptotiques de la surface.

29. Notons encore que nos résultats subsistent, dans une certaine mesure, lorsqu'il y a frottement ou résistance passive quelconque. En effet, une telle résistance agit suivant la tangente à la trajectoire, et la région attractive est définie par une propriété de la composante *normale* de la force agissante (celle-ci devant être de même sens que la courbure géodésique). Il est donc encore démontré qu'un maximum de la fonction U ne peut exister en dehors de la région que nous avons appelée *attractive*. C'est d'ailleurs ce qui résulte de nos formules, car la résistance tangentielle ajoute aux valeurs de $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, tirées des équations de Lagrange, des termes proportionnels à $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, auxquels correspond, dans l'expression de $\frac{d^2U}{dt^2}$, un ensemble nul avec $\frac{dU}{dt}$. Cette même démonstration s'applique au cas d'une fonction quelconque V. Seulement il n'est pas certain que les fonctions U ou V aient un

maximum si elles ne varient pas toujours dans le même sens, puisque le mouvement peut s'arrêter au bout d'un temps fini.

30. Nous allons arriver à des résultats analogues, quoique moins complets, dans le cas de plus de deux variables.

Soit, par exemple, un point matériel libre dans l'espace, sollicité par des forces données et soit U la fonction de forces. Considérons un maximum de U sur la trajectoire. Au point où ce maximum aura lieu, la trajectoire sera tangente à la surface de niveau et la normale principale sera, en direction et sens, la ligne d'action de la force, c'est-à-dire la normale à la surface de niveau dirigée dans le sens des U croissants. Mais, d'autre part, puisqu'il s'agit d'un maximum, la trajectoire doit être, par rapport à la surface, du côté des U décroissants. Il y a contradiction manifeste si la concavité de la surface de niveau est tournée dans le sens opposé à la force.

Ainsi les points où les surfaces de niveau tournent leur convexité dans le sens de la force forment une région qu'on peut appeler *répulsive* et où aucune trajectoire ne peut demeurer indéfiniment, à moins que U ne varie constamment dans le même sens. Mais, au lieu que nous avons pu diviser une surface en deux régions, suivant le sens de la courbure des lignes de niveau, ici trois hypothèses peuvent se présenter : ou bien les surfaces de niveau tournent leur convexité dans le sens de la force, ou bien dans le sens contraire, ou bien elles sont à courbures opposées. Un maximum de U pourra être soit dans l'une soit dans l'autre des régions correspondant aux deux dernières hypothèses. Il en résulte que les régions répulsives relatives, l'une à un mouvement déterminé quelconque, l'autre à son conjugué, ne remplissent pas à elles deux tout l'espace, ainsi qu'il arrivait dans le cas de deux degrés de liberté.

31. Il est aisé de traduire analytiquement ces résultats. Soient, en général, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n paramètres ou coordonnées dont dépend la position d'un système matériel, U la fonction des forces, la force vive étant

$$(21)\qquad 2\mathrm{T} = \sum a_{ik} x'_i x'_k = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

les équations de Lagrange donneront encore les valeurs de la quantité

$$x''_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

par une somme de deux termes, l'un homogène et du second degré par rapport aux x', l'autre indépendant de ces quantités et égal à

$$\frac{1}{\Delta}\sum A_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)},$$

Δ étant le discriminant de la forme f, A_{ik} un de ses mineurs, F la forme adjointe de f. On aura donc

$$(22) \qquad \frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)} + \Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

Φ étant une certaine forme quadratique en $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Dans le cas où $V = U$, le terme $\sum \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)} = F\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ est essentiellement positif. Par conséquent, si l'on considère un maximum de U, c'est-à-dire un point où l'on a

$$(23) \qquad \frac{dU}{dt} = 0,$$

$$(24) \qquad \frac{d^2 U}{dt^2} \leq 0,$$

ces conditions entraîneront

$$(25) \qquad \Phi(x') \leq 0.$$

Or, moyennant l'égalité (23), la forme Φ devient une forme à $n-1$ variables et l'inégalité ne pourra avoir lieu si la forme ainsi exprimée est définie positive. Il y a donc lieu de considérer comme formant une région répulsive, dans laquelle la trajectoire ne reste pas, en général, constamment comprise, l'ensemble des points pour lesquels cette cir-

constance se présente; les points où la forme Φ (considérée comme forme à $n-1$ variables) contient $1, 2, 3, \ldots, n-1$ carrés négatifs constituant une région non répulsive.

Lorsque V sera quelconque, on fera usage de l'équation des forces vives $2T = U + h$. Moyennant l'égalité (23), la forme f est, elle aussi, une forme (définie positive) à $n-1$ variables et le rapport des formes Φ et $2T$ restera supérieur à un certain minimum λ_0 (la plus petite racine de l'équation en λ relative au faisceau $\Phi - 2\lambda T$ à $n-1$ variables) et le maximum de V aura lieu dans la région où la quantité

$$(26) \qquad \frac{1}{A}\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)} + \lambda_0(U+h)$$

est négative.

Le rapport $\frac{\Phi}{2T}$ n'est d'ailleurs autre que la valeur de $\frac{d^2V}{ds^2}$ comptée sur la géodésique de la forme T tangente à la trajectoire; il est clair que cette valeur est, au facteur $\frac{dV}{dn}$ près, la courbure normale de la surface $V = \text{const.}$, correspondant à la direction de cette trajectoire dans l'espace d'élément linéaire $2T\,dt^2$, de sorte que λ_0 est, au même facteur près, l'une des courbures principales de cette surface.

D'une façon générale, on aura des limites de $\frac{d^2V}{dt^2}$ en remplaçant, dans l'expression (26), λ_0 par les limites extrêmes entre lesquelles varie $\frac{\Phi}{2T}$ lorsque $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ prennent toutes les valeurs possibles.

32. La discussion des trajectoires exceptionnelles le long desquelles la fonction considérée varie toujours dans le même sens est tout à fait analogue à celle qui a été présentée plus haut. Si l'on exclut : 1° les cas où cette fonction, ou bien l'une de ses dérivées jusqu'au troisième ordre, augmenterait indéfiniment avec t; 2° les cas où il en serait ainsi de l'un des coefficients a_{ik} ou d'une de leurs dérivées jusqu'au second ordre inclusivement; 3° les cas où l'un des axes de la quadrique, représentée par l'équation

$$f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 1,$$

augmenterait indéfiniment, on voit, comme précédemment, que $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendent vers zéro.

Prenons le cas de $V = U$: si le mobile reste indéfiniment dans la région répulsive, il pourra arriver qu'il s'éloigne indéfiniment. Sinon, $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}$ tendront vers zéro; en effet, si $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, par exemple, était une infinité de fois supérieur à un nombre déterminé α, on pourrait tirer x'_1 de l'identité

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial U}{\partial x^2}x'_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}x'_n, \tag{27}$$

pour reporter cette valeur dans l'expression Φ, moyennant quoi il viendrait

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \Psi(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n) + \frac{dU}{dt}Q.$$

Q, ne contenant en dénominateur que $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, resterait fini dans les conditions où nous nous plaçons et, par conséquent, puisque Ψ est, dans la région répulsive, une forme définie positive, $F\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ devrait tendre vers zéro, ce qui est impossible si les dérivées de U ne sont pas toutes infiniment petites.

Si donc, les positions d'équilibre sont isolées, toute trajectoire devra quitter la région répulsive, sauf celles qui se rapprochent asymptotiquement d'une position d'équilibre instable, ou qui passent dans des régions singulières, ou qui s'éloignent indéfiniment.

35. Comme dans le cas de deux paramètres, nous sommes assurés en général de l'existence d'une région répulsive par la considération du minimum de U, la forme Φ étant définie positive dans le voisinage de ce point, puisqu'elle se réduit à $\sum \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} x'_i x'_k$. La même remarque s'applique pour une fonction quelconque V, puisque le terme $\frac{1}{\lambda}\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)}$ disparaît en un minimum de V.

Un cas particulier intéressant est celui où la région répulsive remplit tout l'espace. On sait, par exemple, qu'un mobile soumis à une répulsion émanée d'un point fixe et fonction de la seule distance ne décrit jamais de trajectoires restant à distance finie, sauf le cas, exceptionnel d'ailleurs, où, la force s'annulant avec la distance, la trajectoire s'approche indéfiniment du point fixe. Les considérations précédentes nous montrent que cette propriété appartient à toute une catégorie de forces, que l'on peut appeler *forces répulsives* et caractérisées par cette condition que la force est partout dirigée vers la convexité des surfaces de niveau. Toute trajectoire s'éloigne alors à l'infini ou tend asymptotiquement vers une position d'équilibre instable (s'il n'y a pas de points singuliers pour les composantes de la force).

34. Étant donnée une position quelconque du système, laquelle ne soit pas une position d'équilibre, on peut choisir la fonction V de manière que la quantité (26) soit positive dans le voisinage de cette position pour toutes les valeurs des x', puisqu'on peut disposer arbitrairement des dérivées de V. On a ainsi un moyen de construire, d'une infinité de façons, un domaine entourant la position considérée et d'où toute trajectoire doit sortir.

35. Nous pouvons répéter, dans le cas général, ce que nous avons dit précédemment relativement au frottement. Il est clair, en effet, que, lorsqu'un point qui se meut dans l'espace sous l'action de forces données est soumis à des résistances passives agissant suivant la tangente à la trajectoire, le maximum de U sur celle-ci aura encore lieu dans la région non répulsive. La même conclusion subsiste dans le cas des systèmes si les composantes du frottement sont proportionnelles aux composantes du déplacement réel.

36. Les considérations ci-dessus développées permettent de démontrer la réciproque du théorème de Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre, autrement dit le théorème suivant :

Une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maxima est instable.

C'est, en effet, nous l'avons dit, par la considération du minimum de U sur la trajectoire que M. Kneser est parvenu à la démonstration dans le cas particulier où la fonction des forces est *minima*. Quant au cas général, il a été traité par M. Liapounoff en 1892 dans un Mémoire malheureusement écrit en langue russe, mais dont un extrait a été inséré au journal de M. Jordan en 1897 (¹), et dont j'ignorais l'existence lorsque j'ai communiqué à l'Académie des Sciences les remarques qui précèdent et la démonstration qui s'y rattache étroitement. Comme cette démonstration est analogue, mais non identique à celle de M. Liapounoff, je crois utile de la reproduire ici.

On peut, en premier lieu, arriver au résultat en étudiant une fonction convenablement choisie des coordonnées. Supposons, comme d'habitude, que, par un changement de variables convenable, on ait amené la force vive à la forme

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} 2T = {} & \sum(1+\ldots)x'^2 = \sum_i(1+\ldots)x_i'^2 \\ & + \sum_k(1+\ldots)x_k'^2 + \sum_l(1+\ldots)x_l'^2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

et la fonction des forces à la forme

$$2U = \sum_i a_i x_i^2 - \sum_k b_k x_k^2 + \ldots,$$

les termes représentés par des points étant de degrés supérieurs à ceux qui sont écrits et les variables étant partagées en trois groupes (x_i), (x_k), (x_l), suivant qu'elles sont représentées dans la partie quadratique de U par des carrés positifs, négatifs ou nuls. Nous admettons que l'absence du maximum se reconnaît à l'inspection des termes quadratiques et, par conséquent, qu'il existe au moins une variable x_i.

Nous considérerons la fonction

$$(29)\qquad 2V = (1+\alpha)\sum_i x_i^2 + \sum_k x_k^2 - \beta\sum_l x_l^2,$$

(¹) 5ᵉ série, t. III, fasc. 1, p. 8.

où α et β sont deux nombres positifs tels que $1+\alpha > \beta$. Nous aurons

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \sum_i [a_i(1+\alpha)+\ldots]x_i^2 - \sum_k (b_k+\ldots)x_k^2 + \Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

$$\Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \sum_i (1+\alpha+\ldots)x_i'^2 + \sum_k (1+\ldots)x_k'^2 - \sum_l (\beta+\ldots)x_l'^2 + \ldots.$$

de sorte que, si l'on désigne, comme précédemment, par λ_0 la plus petite (algébriquement) des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{\Phi}{2T}$ lorsque $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ varient, on a

$$\lambda_0 > -(\beta+\varepsilon)$$

et

$$\Phi(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) > -2(\beta+\varepsilon)(U+h),$$

ε étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut.

Bornons-nous aux trajectoires pour lesquelles la constante h des forces vives est nulle ou négative et qui partent d'un point vérifiant l'inégalité $V > 0$; on aura alors

$$\frac{d^2V}{dt^2} > \sum_i (1+\alpha+\ldots)a_i x_i^2 - \sum_k (1+\ldots)b_k x_k^2 - (\beta+\varepsilon)U$$
$$> \sum_i (1+\alpha-\beta-\varepsilon)a_i x_i^2 - \sum_k (1-\beta-\varepsilon)b_k x_k^2 + \ldots.$$

Moyennant les inégalités $U > 0$, $V > 0$, le dernier membre est nécessairement positif. $2U$ est, en effet, égal à la différence des deux quantités

$$P = \sum_i a_i x_i^2,$$

$$Q = \sum_k b_k x_k^2 + \ldots$$

et (à des termes d'ordre supérieur près) le dernier membre en question est égal à $(1+\alpha-\beta-\varepsilon)P-(1-\beta-\varepsilon)Q$. A cause de l'inégalité $P>Q$, cette dernière quantité est positive et dans un rapport non infiniment petit avec $P+Q$, par conséquent aussi (à cause de $V>0$) avec

$$\sum x_i^2+\sum x_k^2+\sum x_l^2 :$$

il dépasse donc en valeur absolue l'ensemble des termes d'ordre supérieur, lequel est très petit par rapport à

$$\sum x_i^2+\sum x_k^2+\sum x_l^2.$$

Si donc on a initialement $V>0$, $\frac{dV}{dt}>0$, V devra croître constamment et indéfiniment, à moins qu'on ait, à un moment déterminé,

$$U>0,$$

$$V>0,$$

$$\sum_i(1+\alpha-\beta-\varepsilon)a_i x_i^2-\sum_k(1-\beta-\varepsilon)b_k x_k^2+\ldots<0.$$

Or, ainsi que nous venons de le voir, la région définie, dans l'espace lieu du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par cette triple inégalité n'est pas attenante à l'origine.

Le théorème est donc démontré.

57. Une méthode qui se présenterait assez naturellement à l'esprit, pour établir la proposition précédente, est celle qui reposerait sur l'étude des petits mouvements : il est aisé de voir que l'on peut donner à ce mode de raisonnement une forme analogue à la précédente : on retombe en effet, sur cette méthode, en prenant $V=x_i^2$ (où la lettre x_i a la même signification que tout à l'heure). D'ailleurs on se heurterait, en suivant cette voie, à des objections que la marche suivie tout à l'heure a permis d'éviter.

Toutefois l'étude des petits mouvements fait entrevoir un fait inté-

ressant : c'est (dans le cas où la fonction de forces n'est pas minima) l'existence de trajectoires particulières sur lesquelles l'instabilité ne se manifeste pas. La méthode précédente ne permet pas de discuter complètement quelles peuvent être ces trajectoires, puisque nous avons dû nous borner aux cas où la constante des forces vives est nulle ou négative. Une seconde démonstration, analogue à celle de M. Liapounoff et fondée, comme elle, sur la considération d'une expression qui contient les vitesses, permet de combler cette lacune.

38. Soient encore

$$2T = \sum (1+\ldots)x_i'^2 + \sum_k (1+\ldots)x_k'^2 + \ldots,$$

$$2U = \sum_i a_i x_i^2 - \sum_k b_k x_k^2 + \ldots,$$

les variables x_i étant, cette fois, celles qui fournissent à la partie quadratique de U des carrés positifs, les x_k celles qui fournissent des carrés négatifs ou nuls; de sorte que tous les a_i sont positifs, tous les b_k positifs ou nuls et que, comme précédemment, il y a au moins une variable x_i. Nous prendrons

$$(30) \qquad 2V = \sum_i \alpha_i x_i^2 - \sum_k \beta_k x_k^2 + \sum_i A_i x_i'^2 - \sum_k B_k x_k'^2,$$

les nombres α_i, β_k, A_i, B_k étant positifs.

Les équations du mouvement donneront

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2V}{dt^2} = {} & \sum_i (\alpha_i a_i + A_i a_i^2) x_i^2 + \sum_k (\beta_k b_k - B_k b_k^2) x_k^2 \\ & + \sum_i (\alpha_i + A_i a_i) x_i'^2 + \sum_k (B_k b_k - \beta_k) x_k'^2 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou encore, ρ étant un nombre positif,

$$(31') \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = 2\rho V + F(x, x') + \ldots,$$

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} F(x,x') = &\sum_i [\alpha_i(a_i-\rho)+A_i a_i^2] x_i^2 + \sum_k [\beta_k(b_k+\rho) - B_k b_k^2] x_k^2 \\ &+ \sum_i [\alpha_i + A_i(a_i-\rho)] x_i'^2 + \sum_k [B_k(b_k+\rho) - \beta_k] x_k'^2. \end{aligned}\right.$$

Si les nombres α, β, A, B, ρ satisfont aux conditions, évidemment compatibles,

$$(33)\qquad \rho < a_i,$$

$$(34)\qquad \frac{b_k^2}{b_k+\rho} < \frac{\beta_k}{B_k} < b_k + \rho,$$

la forme F sera définie positive; son rapport à la somme

$$S_0 = \sum (x^2 + x'^2)$$

restera supérieur à un nombre fixe et, par conséquent, lorsque les x et les x' seront tous suffisamment petits, F surpassera en valeur absolue l'ensemble des termes non explicitement écrits de l'équation (31).

Donc, dans les mêmes conditions, l'inégalité $V > 0$ entraînera

$$\frac{d^2V}{dt^2} > 0.$$

Si donc la trajectoire considérée est telle que, à l'instant initial V soit positif et qu'on la suive dans un sens tel que $\frac{dV}{dt} > 0$, la quantité V ne cessera de croître jusqu'au moment où l'on aura à la fois $V > 0$, $\frac{d^2V}{dt^2} \leqq 0$.

Nous venons de voir que ces deux inégalités ne sont pas compatibles au voisinage de la position d'équilibre.

L'instabilité est donc démontrée.

39. Notre démonstration ne laisse de côté que des trajectoires exceptionnelles. En effet, l'unique restriction que nous avons dû apporter au choix de la trajectoire est l'inégalité $V > 0$. Or on peut,

sans que la double inégalité (34) cesse d'être vérifiée, prendre les nombres B_k et β_k aussi petits qu'on le veut et, par conséquent, si l'on se donne la condition que le rapport de la plus grande des quantités $|x_k|$, $|x'_k|$ à la plus petite des quantités $|x_i|$, $|x'_i|$ ne surpasse pas un nombre déterminé N aussi grand qu'on le veut d'ailleurs, on pourra choisir les nombres B_k, β_k de manière à vérifier l'inégalité en question. Le théorème n'est donc en défaut que relativement aux écarts initiaux très petits pour lesquels le nombre N est infiniment grand. Toutefois, bien entendu, le domaine dont la trajectoire sort nécessairement se resserre à mesure que N augmente.

Il reste encore à voir ce qui se passe lorsque, partant d'un mouvement initial tel que $V > 0$, on le suit dans un sens tel que $\frac{dV}{dt}$ soit négatif. Si à un instant ultérieur les conditions $V > 0$, $\frac{dV}{dt} \geqq 0$ sont vérifiées, nous sommes ramenés au cas général. Si l'inégalité $V > 0$ continue à être vérifiée, mais que $\frac{dV}{dt}$ ne change plus de signe, V tend vers une limite non négative et, d'après le raisonnement du n° 4, $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendent vers zéro. La limite de V ne peut être que zéro, à cause de la formule (31'). Puisque V et $\frac{d^2V}{dt^2}$ sont infiniment petits, il en est de même de la forme $F(x, x')$ et, comme cette forme est définie, il en résulte que la trajectoire tend asymptotiquement vers la position d'équilibre.

Ce cas écarté, il faut admettre que la trajectoire entre dans la région $V < 0$. Si elle en ressort à un moment quelconque, V sera croissant à ce moment et nous sommes encore ramenés au cas général. Il faut donc supposer que l'inégalité $V < 0$ ne cesse plus d'être vérifiée. La trajectoire ne repassera donc pas dans le voisinage d'une position déjà occupée. Or dans ce cas, d'ailleurs exceptionnel, il existe [1] une ou plusieurs trajectoires T desquelles la trajectoire considérée s'approche indéfiniment pour des valeurs infiniment grandes de t, et qui peuvent d'ailleurs se réduire à un point, à savoir une position d'équi-

---

[1] *Voir* plus loin, n° 54.

libre. Une trajectoire T ne passera jamais dans la région $V > 0$, sans quoi la trajectoire considérée y passerait une infinité de fois, supposition que nous venons d'exclure.

Ainsi un mobile abandonné dans le voisinage d'une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maxima s'en écarte d'une quantité finie. Il ne peut y avoir d'exception que : 1° pour les trajectoires telles que les écarts et les vitesses des paramètres par rapport auxquels il y a instabilité soient et restent très petits relativement aux écarts et aux vitesses des autres paramètres; 2° pour les trajectoires asymptotiques aux précédentes; 3° en particulier pour les trajectoires qui tendent asymptotiquement vers la position d'équilibre considérée ou une position d'équilibre très voisine, s'il en existe.

On trouve une vérification des conclusions que nous venons d'énoncer dans le mouvement d'un point sur le paraboloïde hyperbolique à axe vertical, tel qu'il a été étudié par M. de Saint-Germain ([1]). Le sommet de la surface est une position d'équilibre instable et le plan tangent en ce point partage la surface en deux parties, l'une au-dessus de ce plan (région répulsive), l'autre au-dessous. Il est à peu près évident *a priori* que le mobile abandonné sans vitesse initiale dans la seconde de ces régions s'éloignera indéfiniment vers le bas. Mais on pourrait être tenté de croire que d'un point quelconque situé au-dessus du plan tangent et voisin du sommet, part une trajectoire stable. Il n'en est rien, ainsi que nous venons de le voir et c'est ce que montre la discussion de M. de Saint-Germain; les seules trajectoires qui ne s'écartent pas du sommet sont, soit des arcs de la parabole principale à concavité supérieure, soit des courbes asymptotiques à ces arcs.

Dans le cas où il n'y a que deux degrés de liberté et où la fonction de force est minima, M. Kneser a pu, par une méthode simple et élégante, constater la présence de trajectoires asymptotiques à la position d'équilibre. Il est clair que dans le cas général une discussion analogue serait beaucoup plus compliquée. Par exemple, il ne passe pas par un point quelconque du paraboloïde hyperbolique une trajectoire tendant asymptotiquement vers le sommet : la seule trajectoire présentant ce caractère est la parabole principale à concavité inférieure.

([1]) Ce journal, 3e série, t. III, p. 401 et suiv.; 1877.

40. Revenons au mouvement d'un point sur une surface. Dans le cas des surfaces de révolution, notre proposition fondamentale correspond exactement à l'une des propriétés que nous avons reconnues en commençant, la région attractive que nous avons définie au n° **7** étant précisément celle où $\frac{dU}{dr}$ est négatif. On a, en effet,

$$I_U = \frac{1}{E^2 r^3}\left(\frac{dU}{dr}\right)^3$$

(en désignant par $E\,dr^2 + r^2\,d\theta^2$ l'élément linéaire de la surface).

Mais cette propriété est loin d'être la plus importante de celles que nous avons rappelées en cet endroit. Elle n'est qu'un cas particulier de la relation d'inégalité qui doit exister entre les deux parallèles limites de la trajectoire. Par exemple, dans le mouvement du point pesant sur la sphère, le théorème de la région attractive montre seulement que le mobile passe dans l'hémisphère inférieur. Or nous savons que, lorsqu'il a passé en un point déterminé A de l'hémisphère supérieur, non seulement il doit traverser l'hémisphère inférieur, mais encore il doit passer au-dessous du parallèle symétrique, par rapport à l'équateur, de celui qui contient le point A. Notre théorie ne nous donne pas l'équivalent de ce fait. Nous avons appris, il est vrai, à restreindre la région attractive suivant les valeurs prises par la constante des forces vives. C'est ainsi qu'un point pesant mobile sur l'ellipsoïde (n° **28**) passe nécessairement à l'intérieur d'une courbe C entourant le point le plus bas et d'autant plus resserrée autour de ce point que la constante des forces vives est plus petite. Mais il est clair que ce résultat n'est pas celui que nous cherchons. Si, par exemple, nous supposons le mobile abandonné sans vitesse initiale en un point A de la moitié supérieure de la surface, la courbe C sera d'autant moins resserrée que le point A aura été pris plus élevé, et c'est le contraire qui devrait avoir lieu, le mobile descendant d'autant plus bas qu'il est monté plus haut.

Malheureusement un pareil résultat paraît très difficile à établir. Il se distingue, en effet, des précédents par ce caractère qu'il différencie les unes des autres les diverses trajectoires, et cela indépendamment de l'intégrale des forces vives. La remarque faite au n° **24** présente

seule ce caractère; elle ne répond pas néanmoins au désidératum actuel.

On pourra, quoique d'une manière très incomplète, combler cette lacune en employant la remarque du n° **25**. Nous avons vu, en effet, à ce moment que la fraction $\frac{\Phi(u', v')}{2T}$ avait, lorsque u' et v' variaient, un certain minimum λ_1 et que l'on avait

$$\frac{d^2V}{dt^2} > \Delta(U, V) + 2\lambda_1(U+h). \tag{35}$$

Considérons une ligne V = const. Sur cette ligne, ou du moins sur la partie de cette ligne où $U+h$ est positif, le second membre aura un certain minimum $\mathfrak{M}$ qui sera fonction de V et l'on pourra écrire

$$\frac{d^2V}{dt^2} > \mathfrak{M}(V).$$

Considérons une portion de trajectoire comprise entre un minimum de V et le maximum suivant, μ et ν étant ces valeurs maxima et minima de V. Nous pourrons multiplier l'inégalité précédente par $\frac{dV}{dt}dt$ et intégrer. $\frac{dV}{dt}$ s'annule aux limites d'intégration, et il vient

$$\int_{\mu}^{\nu} \mathfrak{M}\, dV < 0.$$

Si la fonction $\mathfrak{M}$ est positive pour $V = \mu$, on aura ainsi une limite inférieure de ν. Or c'est ce qui arrive dans le voisinage du minimum de V, le second membre de l'inégalité (35) étant essentiellement positif.

Pour fixer les idées, admettons que $\mathfrak{M}$ soit positif jusqu'à une certaine valeur de V, puis devienne ensuite négatif. La courbe qui a pour abscisse V et pour ordonnée $\mathfrak{M}(V)$ sera formée d'une branche ascendante $x'S$ et d'une branche descendante Sx. Soit μ une valeur de V correspondant à un point de la branche ascendante : la branche descendante comprendra un point de même ordonnée et d'abscisse ν (cette dernière étant d'ailleurs d'autant plus grande que la première était

plus petite), et telle que, sur toute trajectoire qui part de la ligne $V = \mu$ et s'en éloigne de manière que V croisse, la valeur maxima suivante de V soit plus grande que ν.

Il y aura souvent avantage à prendre $V = U$, de manière à faire figurer dans $\mathfrak{M}$ le terme essentiellement positif ΔU.

Par exemple, dans le mouvement du point pesant sur l'ellipsoïde à axe vertical on obtient aisément ainsi (à l'aide des formules du n° **28**) une limite de la hauteur à laquelle était descendu le mobile dans la moitié inférieure de la surface en fonction de la hauteur à laquelle il est monté dans la moitié supérieure.

41. Toutefois la valeur de $\mathfrak{M}$ ainsi calculée est trop élevée et, par conséquent, la valeur de ν trop petite. On peut, théoriquement du moins, trouver une limite plus approchée en utilisant l'identité

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial u} u' + \frac{\partial V}{\partial v} v',$$

et prenant pour λ_1 la plus petite des deux valeurs du rapport $\frac{\Phi}{2T}$ qui correspondent aux valeurs de u', v' satisfaisant à cette identité et à l'équation des forces vives. λ_1 sera alors une fonction de u, v, $\frac{dV}{dt}\cdot$ Laissant cette dernière quantité invariable, on fera varier le point (u, v) sur la ligne $V = \text{const.}$ La valeur ainsi calculée du second membre de l'inégalité (35) aura un minimum $\mathfrak{M}$ qui sera une fonction de V, $\frac{dV}{dt}$ et l'on sera conduit à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \mathfrak{M}. \tag{36}$$

Mais il est clair que ce procédé ne sera pas, en général, applicable à cause des difficultés que présente l'intégration de cette équation.

42. Il est pourtant un cas où celle-ci prend une forme très simple, c'est celui où les trois formes quadratiques Φ, $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{dV}{dt}\right)^2$ sont en

involution, de sorte que l'on a

$$\Phi = A\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B\left(\frac{dV}{dt}\right)^2.$$

Dans ces conditions, l'équation (36) devient linéaire et du premier ordre par rapport à $\left(\frac{dV}{dt}\right)^2$ considérée comme fonction de V. Or, si nous écrivons le déterminant des coefficients des trois formes quadratiques, nous trouvons une expression qui, à une puissance près de $EG - F^2$, se réduit à $\Theta(V, \Delta V)$. Cette expression, égalée à zéro, exprime que ΔV est une fonction de V, c'est-à-dire, comme on sait, que les courbes $V = \text{const.}$ forment une famille de courbes parallèles.

Supposons donc qu'on connaisse une famille de courbes parallèles fermées et qu'on rapporte la surface à ces courbes et aux géodésiques qui leur sont orthogonales. Si

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$$

désigne l'élément linéaire, en dirigeant le calcul comme il vient d'être dit, nous voyons que l'équation différentielle des géodésiques prend la forme particulièrement simple

$$(37) \qquad \frac{d}{du}\log\left[1 - \left(\frac{du}{ds}\right)^2\right] = -\frac{2}{C}\frac{\partial C}{\partial u}.$$

$1 - \left(\frac{du}{ds}\right)^2$ est égal au carré du cosinus de l'angle α que fait la géodésique considérée avec la ligne $u = \text{const.}$; quant à la quantité $\xi = -\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}$, elle est liée à la courbure totale par l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi^2 = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = \frac{1}{RR'}.$$

Supposons que la surface ait sa courbure partout positive et comprise entre deux limites k^2 et k'^2. Prenons pour la ligne $u = 0$ une géodésique. L'équation précédente donne

$$k^2 < \frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi^2 < k'^2,$$

et, par conséquent (puisque ξ s'annule avec u),

$$|k \operatorname{tang} k u| < |\xi| < |k' \operatorname{tang} k' u|.$$

Tant que u est inférieur à $\frac{\pi}{2k'}$, ξ est fini, C différent de zéro (ce qui se déduit d'ailleurs, bien entendu, des recherches connues de Bonnet) : par conséquent, dans la bande ainsi définie, u et v sont des fonctions bien déterminées de la position du point. Prenons alors l'équation (37) ou

$$(38) \qquad d \log \cos \alpha = \xi \, du.$$

Cette équation nous donnera

$$|-d \log \cos k u| < |d \log \cos \alpha| < |-d \log \cos k' u_0|.$$

Si α désigne l'angle fait par un arc de géodésique quelconque avec la géodésique $u = 0$, le maximum u_0 de u sur cet arc sera compris entre $\frac{\alpha}{k'}$ et $\frac{\alpha}{k}$, puisqu'on aura $\cos k u_0 > \cos \alpha > \cos k' u$.

En particulier, si $\alpha < \frac{k}{k'} \frac{\pi}{2}$, ce maximum sera plus petit que $\frac{\pi}{2k'}$ et, par conséquent, u et v seront uniformes sur cet arc. Celui-ci coupera à nouveau la géodésique $u = 0$ sous un angle β, tel que le rapport $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ soit compris entre le rapport $\frac{\cos k u_0}{\cos k' u_0}$ et son inverse.

Enfin, on aura une relation d'inégalité entre deux écarts maxima consécutifs de part et d'autre de la ligne $u = 0$: il est clair que le rapport de ces deux écarts est compris entre $\frac{k}{k'}$ et $\frac{k'}{k}$.

Lorsque le mobile est soumis à une force accélératrice, on trouve, en utilisant l'équation des forces vives,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} \left[2(U + h) - \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \right],$$

laquelle, si U est fonction de u seul, prend la forme, tout à fait ana-

logue à (37),

$$\frac{d}{du}\log\left[2(\mathrm{U}+h)-\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]$$
$$=\frac{d}{du}\log(\mathrm{U}+h)\left[1-\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right]=-\frac{2}{\mathrm{C}}\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial u},$$

d'où l'on pourrait déduire un certain nombre de conséquences analogues aux précédentes.

45. Une autre notion que l'on peut considérer comme correspondant à celle des parallèles limites sur une surface de révolution est celle de ce qu'on pourrait appeler le *domaine* d'une ligne géodésique ou d'une trajectoire de Dynamique, et qui est analogue aux ensembles introduits par M. Poincaré dans son Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles ([1]).

Soit une géodésique d'une surface de révolution (ou une trajectoire de Dynamique sur cette surface) qui oscille entre deux parallèles limites.

Lorsqu'un point mobile, parcourant cette courbe dans un sens déterminé, passe de l'un à l'autre de ces deux parallèles, le plan méridien qui le contient tourne autour de l'axe de révolution d'un certain angle constant. Si cet angle est commensurable avec π, la géodésique est fermée. Mais, dans le cas contraire, on sait que cette géodésique passe aussi près qu'on le veut de n'importe quel point situé dans la bande de surface comprise entre les deux parallèles extrêmes. Si l'on traçait la courbe en noir, en la continuant indéfiniment, on noircirait toute la bande en question, et cela quelque petite que soit l'épaisseur du trait. Nous pourrons dire que notre géodésique *remplit* cette bande ou que cette bande constitue son *domaine*.

Lorsque l'élément linéaire, au lieu d'être de révolution, a la forme de Liouville $(\mathrm{U}-\mathrm{V})(du^2+dv^2)$, le domaine est une bande limitée par deux lignes $u=$ const. ou $v=$ const. (ou des branches de ces lignes), etc.

([1]) Troisième Partie, ce journal, 4e série, t. I, p. 225 et suiv.; 1885.

44. u et v étant les coordonnées curvilignes sur notre surface, posons, comme d'ordinaire,

$$p = \frac{\partial T}{\partial u'}, \qquad q = \frac{\partial T}{\partial v'}, \qquad 2T = A^2 u'^2 + C^2 v'^2 + 2AC \cos\alpha\, u'v',$$

T étant la demi-force vive; de sorte que u, v, p, q seront, dans l'espace E_4 à quatre dimensions, les coordonnées d'un point qui représentera la position du mobile et sa vitesse. D'ailleurs, au lieu des coordonnées p et q, on peut introduire $\frac{ds}{dt} = s'$ et l'angle ω que fait la tangente à la trajectoire avec l'axe des x d'un trièdre attaché à la surface, quantités liées aux premières par les formules ([1])

$$(39) \qquad p = As' \cos(\omega - m), \qquad q = Cs' \cos(n - \omega).$$

Bornons-nous au cas des géodésiques et faisons $s' = 1$. L'état de mouvement du point mobile M sera alors représenté, dans un espace à trois dimensions E_3, par un point P de coordonnées u, v, ω; autrement dit, la position de ce dernier définira un élément de ligne sur la surface donnée. Bien entendu, on ne devra pas considérer comme distinctes deux valeurs de ω différant d'un multiple de 2π, de sorte qu'on pourra considérer cette quantité comme toujours comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. D'ailleurs, la même remarque s'appliquera le plus souvent aux coordonnées u et v. Si, par exemple, la surface est une sphère et que u, v soient la longitude et la latitude, u variera de 0 à 2π, v de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, de sorte que la multiplicité lieu du point P sera un parallélépipède où l'on devra supposer : 1° que les points correspondants de deux faces opposées quelconques sont confondus; 2° que les faces $v = \pm\frac{\pi}{2}$ sont contractées de manière à se réduire chacune à une diagonale ([2]).

([1]) T. II, Liv. V, Chap. II, Tableau III. La signification des lettres p et q est seule changée.

([2]) Les relations topologiques des courbes entre elles peuvent évidemment être assez différentes sur la surface primitive et sur la multiplicité E_3 lieu du

Lorsque le point M décrira une géodésique, le point P décrira une courbe donnée par les équations différentielles

$$(40)\qquad \begin{cases} du = dt\dfrac{\sin(n-\omega)}{A\sin\alpha}, \qquad dv = dt\dfrac{\sin(\omega-m)}{C\sin\alpha}, \\ d\omega = -r\,du - r_1\,dv. \end{cases}$$

t, qui représente la longueur de l'arc décrit par le point M, sera dit aussi, pour abréger, la longueur de l'arc décrit par P.

45. Écrivons, dans ce système de notations, les invariants intégraux de M. Poincaré et, en particulier, le *volume*

$$\int\int\int\int du\,dv\,dp\,dq.$$

Si, dans cette intégrale quadruple, on opère le changement de variables (39), elle devient

$$\begin{aligned}\int\int\int\int du\,dv\,dp\,dq &= \int\int du\,dv \int\int \frac{\mathrm{D}(p,q)}{\mathrm{D}(s',\omega)}\,ds'\,d\omega \\ &= \int\int\int\int \mathrm{H}s'\,du\,dv\,d\omega\,ds', \\ \mathrm{H} &= \mathrm{AC}\sin\alpha.\end{aligned}$$

point P. C'est ainsi que les courbes, dont les projections stéréographiques sont représentées *fig.* 4 et 5, sont réductibles l'une à l'autre par déformation continue sur la sphère, mais qu'il n'en est pas de même des courbes qui leur correspondent dans la multiplicité E_3. Cela tient à ce que le passage de la ligne 4 à la ligne 5 ne peut avoir lieu sans qu'il se produise à un certain moment un point de rebroussement, entraînant une discontinuité dans la direction de la tangente.



Fig. 4. Fig. 5.

Étendons cette intégrale au cylindre à quatre dimensions qui a pour base un volume quelconque de l'espace E_3 et pour hauteur le segment $\alpha < s' < \beta$ (α et β étant deux nombres positifs quelconques); elle se décomposera en facteurs

$$\int\int\int\int \mathrm{H}\, s'\, ds'\, du\, dv\, d\omega = \int_\alpha^\beta s'\, ds' \int\int\int \mathrm{H}\, du\, dv\, d\omega.$$

Le second facteur étant constant, il en est de même du premier. Nous aurons ainsi, dans l'espace E_3, l'invariant intégral que l'on peut appeler *volume*

$$\mathrm{J} = \int\int\int \mathrm{H}\, du\, dv\, d\omega.$$

46. Une application simple s'obtient en considérant toutes les géodésiques qui partent des différents points d'une aire déterminée σ. L'intégrale J, étendue aux éléments initiaux de toutes ces géodésiques, est évidemment égale à $2\pi\sigma$. On devra donc retrouver la même valeur en portant sur chacune d'elles un arc déterminé l. Or on obtient ainsi tous les points d'une certaine portion de surface Σ, lieu des centres des cercles géodésiques [1] de rayon l et coupant l'aire primitive σ. Sur chacun de ces cercles, cette aire découpera un arc qui sera vu du centre du cercle sous un certain angle V et l'existence de l'invariant intégral nous montre que l'expression $\int\int \mathrm{V}\, d\Sigma$, étendue à l'aire Σ, est égale à $2\pi\sigma$.

47. Si la surface est fermée, l'invariant étendu à l'ensemble des positions du point P sera fini et égal à $2\pi s$, où s est l'aire totale de la surface.

48. De cette intégrale triple, on déduit une intégrale double invariante en étendant, ainsi que l'indique M. Poincaré, l'intégrale triple

---

[1] Nous appelons ici *cercle géodésique* le lieu des points géodésiquement équidistants d'un point déterminé.

à un tube de trajectoires issues d'une portion de surface Σ quelconque (pourvu qu'elle ne soit pas elle-même un lieu de trajectoires). Soient ξ, η des coordonnées curvilignes sur la surface Σ, de sorte que u, v, ω sont sur cette surface fonctions de ξ, η. On pourra rapporter les points du tube de trajectoires que nous considérons aux coordonnées ξ, η, t et l'intégrale deviendra

$$J = \int\int\int H \frac{\partial(u, v, \omega)}{\partial(\xi, \eta, t)} d\xi\, d\eta\, dt = \int I\, dt,$$

$$(41) \qquad I = \int\int H(u'\, dv\, d\omega + v'\, d\omega\, du + \omega'\, du\, dv),$$

où l'on doit remplacer les dérivées par rapport à t par leurs valeurs tirées des équations (40). L'intégrale I, étendue à la portion de surface Σ, ne changera pas, non seulement si l'on remplace chaque point de cette surface par son conséquent, c'est-à-dire par la position qu'il vient occuper au bout d'un temps déterminé τ, mais encore si l'on remplace Σ par une portion de n'importe quelle autre surface limitée par le même tube de trajectoires.

49. Enfin l'intégrale I peut être considérée comme déduite d'une intégrale simple par l'emploi du théorème de Stokes. Elle est, en vertu de ce théorème, identique à l'intégrale

$$I = \int p\, du + q\, dv,$$

prise le long du contour de Σ.

L'intégrale I, étendue à un contour fermé quelconque, étant invariante, cette même intégrale prise le long d'un chemin ouvert sera invariante à une quantité près qui ne dépend que des extrémités.

Nous ramenons ainsi les propriétés des invariants intégraux à ce fait bien connu que si un arc de géodésique varie de manière que son origine décrive une ligne AB et son extrémité une ligne A'B', on a

$$BB' - AA' = \int_{A'B'} (p\, du + q\, dv) - \int_{AB} (p\, du + q\, dv).$$

50. Pour définir le domaine d'une trajectoire déterminée, prenons dans l'espace E_3 une portion de surface Σ qui soit traversée une infinité de fois par cette trajectoire. Les points d'intersection seront tous distincts les uns des autres si la trajectoire n'est pas fermée. Un tel ensemble de points admettra au moins un point limite P_0. La trajectoire passera une infinité de fois dans le voisinage de ce point, et cela pour des valeurs indéfiniment croissantes de t; car il est clair que deux points voisins qui ne sont pas sur le même segment infiniment petit de trajectoire ne peuvent être reliés que par un segment de trajectoire à la longueur duquel on peut assigner une limite inférieure déterminée.

En déplaçant de toutes les manières possibles la surface Σ, il est évident que nous aurons, dans l'espace E_3, un ensemble de points P tels que la trajectoire passe infiniment près de chacun d'eux pour des valeurs infiniment grandes de t.

A cette dernière restriction près, la définition de cet ensemble est, comme on le voit, identique à celle de l'*ensemble dérivé* de M. Cantor. Il partage avec ce dernier la propriété d'être *fermé*, c'est-à-dire de contenir son propre dérivé.

C'est l'ensemble ainsi défini qu'on peut appeler *le domaine de la trajectoire dans l'espace* E_3. A la projection de ce domaine sur le plan des uv correspond, sur la surface s, l'ensemble des points M près desquels la trajectoire passe une infinité de fois, autrement dit le domaine tel que nous l'avons introduit précédemment.

51. Le domaine d'une trajectoire peut être considéré comme connu si l'on donne les points P_0 de ce domaine situés sur une portion de surface Σ qui rencontre toutes les trajectoires (nous savons, d'après ce qui précède, former de telles surfaces).

Si, à partir d'un point quelconque de Σ, nous portons sur la trajectoire issue de ce point une longueur déterminée l (positive ou négative), la position du nouveau point ainsi obtenu variera continûment avec celle du premier. Si donc notre trajectoire passe une infinité de fois aux environs de l'un, elle passera une infinité de fois aux environs de l'autre.

L'ensemble des points P se composera donc de l'ensemble des tra-

jectoires menées par les différents points P_0; c'est l'ensemble des points P_0 qu'il suffit d'étudier.

32. *Si le point* P *appartient au domaine du point* M (¹) *et le point* Q *au domaine du point* P, *le point* Q *appartient au domaine de* M.

En effet, par hypothèse, on peut prendre sur la trajectoire du point P un arc $PP' = \lambda$ tel que le point P' soit aussi voisin que l'on veut du point Q. D'autre part, puisque le point P fait partie du domaine du point M, il existe sur la trajectoire issue de ce dernier des points M aussi voisins qu'on le veut de P et, en particulier, assez voisins de P pour qu'en prenant l'arc $M P'' = \lambda$, la distance $P' P''$ soit plus petite qu'une quantité quelconque donnée.

33. Si la trajectoire repasse une infinité de fois près d'un quelconque de ses points, cet ensemble des P_0 sera non seulement fermé, mais encore condensé en soi ; ce sera ce que M. Cantor appelle un ensemble *parfait*.

On sait, depuis les travaux de M. Poincaré, que les trajectoires pour lesquelles il n'en est pas ainsi sont exceptionnelles (du moins en supposant le volume total fini), en ce sens que les points d'une région déterminée qui servent d'origines à de pareilles trajectoires peuvent être enfermés dans un volume total aussi petit qu'on le veut. M. Poincaré montre seulement, il est vrai, que les trajectoires qui ne passent que k fois (k étant un nombre quelconque) dans une région *déterminée* r de volume v aussi petit qu'on le veut, peuvent être enfermées dans un volume plus petit que $\frac{V}{kv}$ (V étant le volume total de la multiplicité E_3). Mais il est aisé de compléter à cet égard sa démonstration.

Comme le fait M. Poincaré, appelons *conséquent* d'un point quelconque, la nouvelle position que vient occuper ce point au bout d'un certain temps τ choisi une fois pour toutes, $N^{ième}$ conséquent du même point la position qu'il vient occuper au bout du temps $N\tau$ et prenons pour la région r un tube formé par les trajectoires issues des différents

(¹) C'est-à-dire au domaine de la trajectoire de ce point.

points d'une portion de surface et ayant pour longueur commune τ.

Soient maintenant n_i, N_i deux suites d'entiers augmentant indéfiniment et se correspondant deux à deux. Nous divisons la surface Σ en n_i portions, ce qui divisera la région r en n_i régions partielles r_i, et cela de manière que, lorsque n_i augmente indéfiniment, chacune des portions de Σ devienne infiniment petite dans toutes ses dimensions. Les points de l'une des régions r_i, origines de trajectoires qui, pendant le temps $N_i\tau$, ne passeront qu'une fois dans cette région, occuperont un volume total inférieur à $\frac{V}{N_i}$. La somme de ces volumes pour les n_i portions sera donc moindre que $\frac{Vn_i}{N_i}$. Or puisque nous supposons les nombres n_i et N_i indéfiniment croissants et les dimensions de chacune des parties de Σ indéfiniment décroissantes, l'origine de toute trajectoire qui ne passe pas infiniment près d'un quelconque de ses points sera comprise dans le volume v_i pour quelque valeur de i. On pourra donc enfermer tous ces points dans un volume total aussi petit qu'on le voudra, car il est clair qu'on peut déterminer la suite des N_i, de manière que la série $\sum \frac{n_i}{N_i}$ soit convergente et ait une somme aussi petite qu'on veut.

Ce raisonnement fournit même des renseignements sur la loi suivant laquelle les trajectoires non exceptionnelles se rapprochent d'une position déjà occupée. Car une dimension quelconque δ d'une des portions de Σ diminue comme $\frac{1}{\sqrt{n_i}}$ et, d'autre part, il suffit, pour la validité du raisonnement précédent, de supposer que $\frac{n_i}{N_i}$ tende vers zéro (car on peut toujours, s'il en est ainsi, donner à i une série de valeurs telles que la somme des valeurs correspondantes de $\frac{n_i}{N_i}$ donne une série convergente et de somme aussi petite qu'on veut). Donc la distance minima δ entre un point et les points de la trajectoire correspondante non consécutifs, mais séparés du premier par un arc moindre que $N_i\tau$, diminue (si cette trajectoire n'est pas exceptionnelle) de telle façon que le produit $\delta\sqrt{N_i}$ reste fini ou augmente indéfiniment aussi lentement qu'on veut.

34. Une trajectoire qui ne passe pas infiniment près d'un de ses points peut d'ailleurs être considérée en un certain sens comme une trajectoire asymptotique. Il existe, en effet, au moins une trajectoire de chaque point de laquelle la première s'approche indéfiniment pour des valeurs infiniment grandes de t.

35. Dans tous les problèmes de Dynamique que l'on sait traiter jusqu'au bout, les points P_0 correspondant à une trajectoire qui n'est ni fermée, ni asymptotique forment sur Σ une ligne, de sorte que le domaine est une certaine surface, dont la projection sur le plan des uv donnera la portion S de s remplie par la géodésique, et le contour apparent relatif à ce plan donnant les lignes qui limitent cette portion. En chaque point de ces lignes limites passeront une ou plusieurs géodésiques qui appartiennent tout entières à S, et qui leur seront, en général, tangentes. Les lignes limites auront donc en chaque point une tangente déterminée ou deux tangentes formant un angle rentrant.

Si, au lieu d'une géodésique, l'on a à considérer une trajectoire de dynamique, le domaine S pourra, au contraire, présenter des angles sortants, en des points où $U + h$ s'annule (h étant la valeur de la constante des forces vives sur la trajectoire considérée); c'est ce qui arrive, par exemple, comme on sait, dans le plan, pour

$$U = \tfrac{1}{2}(ax^2 + by^2), \tag{42}$$

a et b étant incommensurables entre eux : le domaine est alors un rectangle. La valeur précédente de la fonction de forces est celle qui convient aux petits mouvements d'un point autour d'une position d'équilibre stable. Il n'en résulte pas, bien entendu, que la conclusion que nous venons d'obtenir relativement à la forme du domaine subsiste pour ces sortes de mouvements, puisque la fonction de forces correspondante n'est représentée que d'une façon *approchée* par l'expression (42); cependant cette conclusion est exacte pour le mouvement sur le paraboloïde elliptique à concavité supérieure, d'après les résultats de M. de Saint-Germain : le domaine est (lorsque la courbe n'est pas fermée) limité par quatre lignes de courbure formant une sorte de rectangle à quatre angles saillants.

56. En continuant à supposer que le domaine d'une trajectoire quelconque non exceptionnelle soit une surface de l'espace E_3, nous pourrons ajouter à la propriété énoncée au n° **52** la suivante :

Si un point P *fait partie du domaine d'un point* M, *réciproquement celui-ci appartient au domaine du premier.*

Nous savons, en effet, que le domaine du point M contient celui du point P. Or, ici, ces deux domaines sont des lignes ou des segments de ligne. Il en résulte évidemment que le domaine du point P contient un point de la trajectoire issue de M et, par conséquent (**51**), M lui-même.

57. Le domaine du point P contenant à son tour le domaine du point M, ces deux domaines coïncident. Ainsi, en se plaçant toujours dans l'hypothèse adoptée aux deux numéros précédents, il existe une simple infinité de géodésiques qui ont même domaine : autrement dit, *les domaines ne dépendent que d'un paramètre.*

Seulement il est permis de se demander jusqu'à quel point cette hypothèse est légitime. Elle est, comme nous l'avons remarqué, réalisée dans tous les exemples où il est possible d'intégrer.

Mais, dans tous ces exemples, l'intégrabilité est due à l'existence d'une intégrale uniforme, laquelle entraîne évidemment ce fait que les domaines sont des surfaces.

Or on peut supposer que, inversement, ce fait ne se rencontre qu'avec une intégrale uniforme. En effet, les domaines ne dépendant que d'un paramètre, ce paramètre aura, pour chaque trajectoire, une valeur déterminée; ce sera une fonction univoque des coordonnées d'un point de E_3, laquelle restera constante sur une trajectoire quelconque.

Nous n'avons d'ailleurs pas démontré que cette fonction soit analytique, ni même ait des dérivées; nous sommes donc bien loin des conditions dans lesquelles s'applique le théorème connu de M. Poincaré; néanmoins ce théorème rend l'existence d'une pareille fonction très invraisemblable et, par conséquent, il est très probable que l'hypothèse dont nous sommes partis n'est pas vérifiée, en général.

58. Le domaine dont nous avons parlé jusqu'ici peut être appelé le domaine *propre* de la trajectoire considérée, par opposition avec ce que l'on peut nommer le domaine *étendu* de la même trajectoire et qui est son domaine propre, joint au domaine propre des trajectoires infiniment voisines. Autrement dit, un point de l'espace E_3 sera dit appartenir au domaine étendu d'une trajectoire donnée si, ε étant une quantité aussi petite qu'on le veut et τ un temps aussi grand qu'on le veut, il existe des trajectoires passant à une distance moindre que ε d'un point déterminé quelconque de la trajectoire donnée et passant également à une distance moindre que ε du point considéré, le second fait ayant lieu après le premier et au bout d'un temps supérieur à τ.

Ce domaine étendu ne coïncide pas toujours avec le domaine propre. Par exemple, sur une surface de révolution dont toutes les géodésiques ne sont pas fermées, le domaine propre d'une géodésique fermée se réduit à cette ligne elle-même, tandis que le domaine étendu comprend, comme celui d'une géodésique non fermée, toute la bande de surface comprise entre deux parallèles. Il y aurait lieu, cependant, de rechercher si les trajectoires pour lesquelles cette coïncidence n'a pas lieu ne sont pas exceptionnelles.

59. Le domaine étendu possède, en toute hypothèse, la propriété dont il est question au n° 56.

Supposons, en effet, que le point P appartienne au domaine étendu du point M. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ les sphères de rayon ε ayant pour centres respectifs les points M et P : il existera, par hypothèse, des points de $\mathcal{S}$ dont les trajectoires iront passer, au bout d'un temps supérieur à τ, dans $\mathcal{S}'$. Ces points formeront dans $\mathcal{S}$ une région r_1. Il existera des trajectoires traversant une infinité de fois la région r_1 : ces trajectoires traverseront donc la région $\mathcal{S}$ après avoir traversé la région $\mathcal{S}$ et cela au bout d'un temps aussi grand qu'on le voudra. C'est ce que nous voulions démontrer.

Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible;

Par M. P. DUHEM.

Dans un précédent Mémoire ([1]), nous avons étudié la stabilité de l'équilibre d'un corps solide flottant à la surface de séparation de deux fluides compressibles, soumis à des forces extérieures quelconques dépendant d'une fonction potentielle. Nous n'avons pas obtenu la solution complète de cette question très générale; nous avons obtenu seulement :

1° Des conditions nécessaires, mais peut-être pas suffisantes pour la stabilité de l'équilibre;

2° Des conditions suffisantes, mais peut-être pas nécessaires.

C'est seulement dans le cas où les deux fluides, à la séparation desquels flotte le solide, confinent par une surface illimitée que nous avons pu donner les conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre du flotteur.

Nous nous proposons, aujourd'hui, de résoudre la question, sinon dans son entière généralité, du moins dans des cas très étendus.

Les résultats que nous nous proposons d'établir sont les suivants :

1° Si le solide flotte à la surface qui sépare un fluide compressible d'un espace vide, quelle que soit la force extérieure, dépendant d'une

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 91; 1895).

fonction potentielle, à laquelle le fluide est soumis, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre du flotteur soit stable.

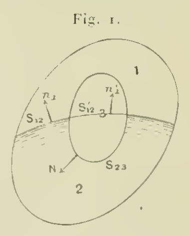
2° La méthode qui fournit ces résultats ne s'applique pas, en général, au cas où le solide flotte à la surface de séparation de deux fluides; toutefois, dans le cas particulier où les deux fluides sont homogènes et incompressibles, elle s'applique et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre du flotteur.

3° Cette méthode s'étend, dans le premier cas, à un flotteur portant un lest fluide, compressible suivant une loi quelconque; dans le second cas, à un navire chargé d'un lest liquide incompressible.

I.

Un fluide 2 (*fig.* 1), compressible suivant une loi quelconque, porte un solide 3; au-dessus du fluide 2, se trouve un espace vide 1.

Fig. 1.



Soient : S_{12} la surface de contact des fluides 1 et 2;

n_1 la normale à cette surface vers l'intérieur de l'espace 1;

S_{23} la surface de séparation du solide et du fluide;

N la normale à cette surface vers l'intérieur du fluide;

Dx, Dy, Dz les composantes du déplacement d'un point du fluide;

Δx, Δy, Δz les composantes du déplacement d'un point du solide;

δf, δg, δh, δl, δm, δn les trois composantes de la translation élémentaire et les trois composantes de la rotation élémentaire en lesquelles se décompose le déplacement virtuel le plus général de ce corps;

ρ_2 la densité du fluide ;

$\delta\rho_2$ la variation de cette densité en un point fixe de l'espace ;

V la fonction potentielle des forces extérieures qui sollicitent le fluide.

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, en tout déplacement virtuel du système,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ &+\rho_2\int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1,x)Dx+\cos(n_1,y)Dy+\cos(n_1,z)Dz]^2\,dS_{12} \\ &+Q>0, \end{aligned}\right.$$

Q étant une forme quadratique en δf, δg, δh, δl, δm, δn dont nous avons formé les coefficients dans notre Mémoire : *Sur la stabilité des corps flottants*.

D'ailleurs, un déplacement virtuel est assujetti à la seule condition

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_2\int_{S_{12}} [\cos(n_1,x)Dx+\cos(n_1,y)Dy+\cos(n_1,z)Dz]\,dS_{12} \\ &+\int_{v_2}\delta\rho_2\,dv_2 \\ &-\int_{S_{21}}\rho_2[\cos(N,x)\Delta x+\cos(N,y)\Delta y+\cos(N,z)\Delta z]\,dS_{21}=0, \end{aligned}\right.$$

qui exprime que la masse du fluide 2 est demeurée invariable.

Dans cette égalité, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y &= \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z &= \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m, \end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées du point du solide qui subit le déplacement infiniment petit Δx, Δy, Δz.

On obtiendra des conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre en écrivant que l'inégalité (1) est vérifiée en de certains dépla-

cements soumis à l'égalité (2). Nous allons, de la sorte, obtenir certaines conditions nécessaires, que nous démontrerons ensuite être suffisantes.

1° *La quantité* $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}$ *n'est négative en aucun point du fluide; elle n'est pas nulle en tous les points d'un volume fini, si petit soit-il.*

Si cette quantité était négative en un point du fluide, par raison de continuité, elle serait négative en tous les points d'un volume fini entourant ce point. Si donc l'hypothèse précédente était inexacte, on pourrait, à l'intérieur du volume v_2, tracer un volume fini u_2 tel que $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}$ ne serait positif en aucun point du volume u_2.

Dès lors, donnons au système un déplacement virtuel défini de la manière suivante :

1° Le solide 3 demeure immobile;

2° La surface S_{12} demeure indéformable;

3° La densité du fluide 2 demeure invariable en tous les points qui se trouvent à l'extérieur du volume u_2 et à sa surface;

4° En tout point intérieur au volume u_2, la densité éprouve une variation $\delta\rho_2$ différente de o, mais vérifiant l'égalité

$$\int_{u_2} \delta\rho_2\, dv_2 = 0.$$

Il est aisé de voir qu'en un semblable déplacement, l'égalité (2) est vérifiée. Mais le premier membre de l'inégalité (1) se réduit à

$$\int_{u_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (\delta\rho_2)^2\, du_2,$$

quantité qui ne peut être que nulle ou négative.

On trouve donc cette première condition nécessaire :

I. *On doit avoir, en tout point du fluide,*

$$\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} \geq 0, \tag{4}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu en tous les points d'un volume fini, si petit soit-il.

2. *On doit avoir, en tout point de la surface* S_{12},

$$(5) \qquad \frac{\partial V}{\partial n_1} \geq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu en tous les points d'une aire finie, si petite soit-elle.

Si, en effet, cette condition n'était pas remplie, on pourrait, sur la surface S_{12}, tracer une aire a_{12} telle qu'en aucun point de cette aire, $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ n'aurait une valeur positive.

Cela étant, imposons au système un déplacement virtuel défini de la manière suivante :

1° Le solide 3 demeure immobile ;

2° La densité ρ_2 demeure invariable en tout point du volume v_2 ;

3° La partie de la surface S_{12}, qui est extérieure à l'aire a_{12}, et le contour de cette aire demeurent invariables ;

4° L'aire a_{12} se déforme de telle sorte que

$$\int_{a_{12}} [\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]\, da_{12} = 0.$$

Il est aisé de voir qu'en un semblable déplacement, l'égalité (2) serait vérifiée. Mais, d'autre part, le premier membre de l'inégalité (1) se réduirait à

$$\rho_2 \int_{a_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]^2\, da_{12},$$

quantité qui ne pourrait être que nulle ou négative, en sorte que l'inégalité (1) ne pourrait être vérifiée.

3. Donnons au solide un déplacement virtuel arbitraire δf, δg, δh, δl, δm, δn, et associons-lui un déplacement du fluide défini de la manière suivante :

1° En tout point de la surface S_{12}, le fluide éprouve un déplace-

ment dont les composantes dx, dy, dz vérifient l'égalité

$$(6) \qquad \cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz = \frac{0}{\frac{\partial V}{\partial n_1}},$$

0 étant une quantité infiniment petite dont la valeur est indépendante de x, y, z;

2° En tout point du volume v_2, la densité éprouve une variation

$$(7) \qquad \delta\rho_2 = \frac{0}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}.$$

Ce déplacement virtuel vérifiera la condition (2), si l'on détermine la valeur de 0 par l'égalité

$$(8) \quad \begin{cases} 0\left[\rho_2 \int_{S_{12}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{12} + \int_{v_2} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}} dv_2\right] \\ = \int_{S_{23}} \rho_2 [\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z] dS_{23}. \end{cases}$$

Il est aisé de voir qu'en vertu des égalités (3) et (8) on peut écrire

$$(9) \qquad 0 = \alpha_1 \delta f + \alpha_2 \delta g + \alpha_3 \delta h + \beta_1 \delta l + \beta_2 \delta m + \beta_3 \delta n,$$

égalité dans laquelle α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 sont six constantes.

Les constantes α_1, β_1 sont données par les égalités :

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N, x) dS_{23}}{\rho_2 \int_{S_{12}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{12} + \int_{v_2} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}} dv_2}, \\[2ex] \beta_1 = \dfrac{\int_{S_{23}} \rho_2 [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)] dS_{23}}{\rho_2 \int_{S_{12}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{12} + \int_{v_2} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}} dv_2}. \end{cases}$$

Les quantités α_2, α_3 se déduisent de α_1 en imposant une permutation circulaire aux lettres x, y, z; les quantités β_2, β_3 se déduisent de même de β_1.

Nous dirons que le déplacement virtuel du fluide défini par les égalités (6), (7), (9) et (10) constitue le *déplacement associé* au déplacement

$$\delta f,\ \delta g,\ \delta h,\ \delta l,\ \delta m,\ \delta n$$

du solide.

Nous obtiendrons évidemment une condition nécessaire pour la stabilité du système en écrivant que l'inégalité (1) est vérifiée lorsqu'on donne au flotteur un déplacement virtuel quelconque et, au fluide, le déplacement associé.

Or, dans ce cas, en vertu des égalités (6) et (7), on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} &= \int_{v_2} \frac{d^2\varphi(\rho_2)}{d\rho_2^2}(d\rho_2)^2 dv_2 \\ &\quad + \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}\left[\cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz\right]^2 dS_{12} \\ &= \theta^2 \left[\int_{v_2} \frac{1}{\dfrac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}} dv_2 + \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{1}{\dfrac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{12}\right]. \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (9) et (10) cette égalité devient

$$(12)\qquad \mathrm{T} = \frac{(a_1\delta f + a_2\delta g + a_3\delta h + b_1\delta l + b_2\delta m + b_3\delta n)^2}{\displaystyle\int_{v_2} \frac{1}{\dfrac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}} dv_2 + \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{1}{\dfrac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{12}}.$$

Dans cette égalité, a_1, b_1 sont donnés par les égalités

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N, x)\, dS_{23}, \\ b_1 &= \int_{S_{23}} \rho_2 [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{23}; \end{aligned}\right.$$

a_2, a_3 se déduisent de a_1 en imposant aux lettres x, y, z une permutation tournante; b_2, b_3 se déduisent de même de b_1.

La quantité T est, comme Q, une forme quadratique en δf, δg, δh, δl, δm, δn. Nous sommes donc amenés à énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il est nécessaire que la forme quadratique $(T + Q)$ *soit une forme définie positive :*

$$T + Q > 0. \tag{14}$$

Nous allons maintenant démontrer que *les trois conditions énoncées sont suffisantes pour assurer la stabilité de l'équilibre du système.*

Considérons, en effet, un déplacement virtuel quelconque du système; il vérifie l'égalité (2).

Imposons ensuite au solide le même déplacement virtuel, et au fluide le *déplacement associé;* l'égalité (2) sera encore vérifiée dans ce dernier cas; de plus, dans les deux cas, le troisième terme du premier membre de l'égalité (2) aura même valeur.

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz]\, dS_{12} \\
&- \rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]\, dS_{12} \\
&+ \int_{v_2} \delta\rho_2\, dv_2 - \int_{v_2} d\rho_2\, dv_2 = 0,
\end{aligned}$$

égalité qui peut encore s'écrire, en multipliant toutes les quantités sous les signes $\int$ par la constante θ, et en tenant compte des égalités (6) et (7),

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]^2\, dS_{12} \\
&- \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz] \\
&\qquad \times [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]\, dS_{12} \\
&+ \int_{v_2} \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (d\rho_2)^2\, dv_2 - \int_{v_2} \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\, d\rho_2\, \delta\rho_2\, dv_2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (11), transforme l'inégalité (1) en celle-ci :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2 - d\rho_2)^2\, dv_2 \\ &+ \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz \\ &\qquad - \cos(n_1, x)\, dx - \cos(n_1, y)\, dy - \cos(n_1, z)\, dz]^2\, dS_{12} \\ &+ T + Q > 0. \end{aligned}\right.$$

Or, il est clair que cette inégalité résulte des trois conditions précédemment énoncées et exprimées par les inégalités (4), (5) et (14). Nous avons donc obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre du système soit stable.

Quelques remarques au sujet de ces conditions.

En vertu des conditions nécessaires (4) et (5), la forme T, donnée par l'égalité (12), ne peut jamais être négative; on obtient donc, comme nous l'avons reconnu ailleurs par une autre voie, des conditions suffisantes pour la stabilité de l'équilibre en associant aux conditions (4) et (5) celle-ci :

La forme quadratique Q est une forme définie positive.

Mais cette dernière condition n'est pas, en général, nécessaire; elle ne devient nécessaire que lorsque T est identiquement nul. C'est ce qui a lieu assurément dans le cas où le fluide est illimité et où l'une au moins des deux quantités $\frac{\partial V}{\partial n_1}$, $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}$ ne croît pas au delà de toute limite lorsqu'on s'éloigne indéfiniment du lieu où se trouve le corps flottant.

Toutes ces conclusions sont d'accord avec celles que nous avons obtenues directement dans notre Mémoire *Sur la stabilité des corps flottants*.

II.

La méthode précédente ne s'applique pas à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre d'un solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides compressibles. Il est aisé de voir, en effet, que la possibilité de déterminer la quantité θ, qui définit le déplacement du fluide *associé* à un déplacement virtuel du solide, repose essentiellement sur ce fait qu'*une seule* condition (2) est imposée aux divers déplacements virtuels du fluide. Or, dans le cas où l'espace 1, au lieu d'être vide, est rempli par un fluide compressible, il faut associer à la condition (2) une deuxième condition analogue, exprimant que la masse du fluide 1 ne varie pas et la méthode exposée au paragraphe précédent ne peut plus servir.

Il est, toutefois, un cas important où la méthode précédente demeure applicable à un corps solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides; c'est le cas où ces deux fluides sont homogènes et incompressibles; dans ce cas, en effet, la condition (2) revient à exprimer que les divers déplacements virtuels ne font pas varier le volume occupé par le fluide 2; mais l'invariabilité de ce volume assure l'invariabilité du volume occupé par le fluide 1 et, partant, l'invariabilité de la masse de ce fluide. Une seule condition est donc imposée aux déplacements virtuels de la masse fluide et le déplacement *associé* à un déplacement virtuel du solide peut être déterminé comme dans le cas précédent.

L'égalité (12) est remplacée, ici, par

$$(16)\qquad T' = \frac{(a'_1\,\delta f + a'_2\,\delta g + a'_3\,\delta h + b'_1\,\delta l + b'_2\,\delta m + b'_3\,\delta n)^2}{\displaystyle\int_{S_{12}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}\, dS_{12}},$$

avec

$$(17)\qquad \begin{cases} a'_1 = \displaystyle\int_{S_{23}} \cos(N, x)\, dS_{23}, & a'_2 = \ldots, \qquad a'_3 = \ldots, \\ b'_1 = \displaystyle\int_{S_{23}} [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{23}, & b'_2 = \ldots, \qquad b'_3 = \ldots. \end{cases}$$

Dans ces expressions, les deux surfaces S_{23}, S_{13} ne jouent pas un rôle symétrique. On peut faire disparaître cet inconvénient. Soit S'_{12} la flottaison, c'est-à-dire le prolongement analytique de la surface S_{12} à l'intérieur du solide; soit n'_1 la normale à cette surface dirigée dans le même sens que n_1; nous pourrons écrire

$$(17\ bis)\quad \begin{cases} a'_1 = -\displaystyle\int_{S'_{12}} \cos(n'_1, x)\, dS'_{12}, & a'_2 = \ldots., \quad a'_3 = \ldots., \\ b'_1 = -\displaystyle\int_{S'_{12}} [y\cos(n'_1, z) - z\cos(n'_1, y)]\, dS'_{12}, & b'_2 = \ldots., \quad b'_3 = \ldots. \end{cases}$$

Pour que l'équilibre d'un corps solide flottant à la surface de séparation de deux fluides incompressibles 1 *et* 2 *soit un équilibre stable, il faut et il suffit :*

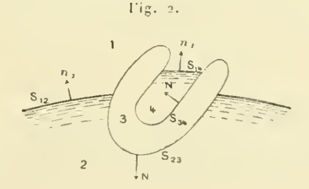
1° *Qu'en tout point de la surface de séparation, la direction de la force passe du fluide moins dense au fluide plus dense;*

2° *Que la forme quadratique en* $\delta f, \delta g, \delta h, \delta l, \delta m, \delta n$ $\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} T' + Q\right)$ *soit une forme définie positive.*

III.

La méthode exposée au § I s'étend au cas où le solide 3 qui flotte à la surface de séparation du fluide compressible 2 et du vide 1 porte

Fig. 2.



un chargement liquide 4, compressible suivant une loi quelconque (*fig.* 2).

Dans ce cas, pour que l'équilibre du système soit stable il faut et il

suffit que l'on ait (¹), pour tout déplacement virtuel,

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 + \int \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(\delta\rho_4)^2\,dv_4 \\
&+ \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}\left[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz\right]^2 dS_{12} \\
&+ \rho_4 \int_{S_{14}} \frac{\partial V}{\partial n_1}\left[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz\right]^2 dS_{14} + R > 0,
\end{aligned}
\right.
$$

R étant une forme quadratique en

$$\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n.$$

Les modifications virtuelles du système sont assujetties aux deux conditions

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} \left[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz\right] dS_{12} \\
&- \int_{S_{23}} \rho_2\left[\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z\right] dS_{23} \\
&\qquad\qquad + \int_{v_2} \delta\rho_2\,dv_2 = 0, \\
&\rho_4 \int_{S_{14}} \left[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz\right] dS_{14} \\
&- \int_{S_{34}} \rho_4\left[\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z\right] dS_{34} \\
&\qquad\qquad + \int_{v_4} \delta\rho_4\,dv_4 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux conditions permettent de définir un déplacement des fluides *associés* à un déplacement virtuel quelconque du solide.

(¹) *Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. II, p. 23; 1896).

Posons, en tout point du fluide 2,

$$(20) \qquad \delta\rho_2 = d\rho_2 = \frac{\theta}{\dfrac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}};$$

en tout point de la surface S_{12},

$$(21) \qquad \cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz = \frac{\theta}{\dfrac{\partial V}{\partial n_1}};$$

en tout point du fluide 4,

$$(22) \qquad \delta\rho_4 = d\rho_4 = \frac{\eta}{\dfrac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}};$$

en tout point de la surface S_{14},

$$(23) \qquad \cos(x_1, x)dx + \cos(x_1, y)dy + \cos(x_1, z)dz = \frac{\eta}{\dfrac{\partial V}{\partial n_1}},$$

θ, η étant deux fonctions de δf, δg, δh, δl, δm, δn linéaires, homogènes, à coefficients constants, que déterminent les égalités (19).

θ est donné par les égalités (9) et (10); η s'exprime d'une manière analogue par les égalités

$$(9\ bis) \qquad \eta = \gamma_1\delta f + \gamma_2\delta g + \gamma_3\delta h + \lambda_1\delta l + \lambda_2\delta m + \lambda_3\delta n,$$

$$(10\ bis) \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\displaystyle\int_{S_{14}} \rho_4 \cos(N, x)\, dS_{14}}{\displaystyle\rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}\, dS_{14} + \int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}}\, dv_4}, \\ \lambda_1 &= \frac{\displaystyle\int_{S_{14}} \rho_4 [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{14}}{\displaystyle\rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}\, dS_{14} + \int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}}\, dv_4}; \end{aligned}\right.$$

γ_2, γ_3, λ_2, λ_3 s'expriment par des égalités analogues.

Pour un tel déplacement, on a

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} U = & \int_{v_4} \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2} (d\rho_4)^2 dv_4 \\ & + \rho_4 \int_{S_{14}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x) dx + \cos(n_1, y) dy + \cos(n_1, z) dz]^2 dS_{14} \\ = & \frac{(c_1 \delta f + c_2 \delta g + c_3 \delta h + d_1 \delta l + d_2 \delta m + d_3 \delta n)^2}{\displaystyle\int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}} dv_4 + \rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{14}}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} c_1 &= \int_{S_{34}} \rho_4 \cos(N, x) dS_{34}, \qquad c_2 = \ldots, \qquad c_3 = \ldots, \\ d_1 &= \int_{S_{34}} \rho_4 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)] dS_{34}, \qquad d_2 = \ldots, \qquad d_3 = \ldots. \end{aligned} \right.$$

On peut énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit :

1° *Que l'on ait, en tout point du fluide* 2,

$$\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'un volume fini ;

2° *Que l'on ait, en tout point du fluide* 4,

$$\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'un volume fini ;

3° *Que l'on ait, en tout point des surfaces* S_{12}, S_{14},

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'une aire finie ;

4° *Que la forme quadratique en* δf, δg, δh, δl, δm, δn,

$$T + U + R$$

soit une forme définie positive.

Cette méthode s'étend sans peine au cas où l'espace 1, au lieu d'être vide, est rempli par un fluide, à la condition que les trois fluides 1, 2 et 4 soient incompressibles.

On peut ainsi déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un navire, flottant sur un liquide pesant et portant un chargement liquide pesant, soit en équilibre stable. Une règle [1], résolvant ce problème, était usitée depuis plusieurs années en architecture navale; le raisonnement dont on faisait usage pour établir cette règle en justifiait la nécessité, mais non la suffisance. La méthode précédente démontre que cette règle est, pour la stabilité d'équilibre d'un navire, condition à la fois nécessaire et suffisante, ainsi que nous l'avons indiqué ailleurs [2].

---

(1) E. GUYOU, *Théorie du Navire*, p. 120. — POLLARD et DUDEBOUT, *Théorie du Navire*, t. II, p. 54.

(2) *Bulletin de l'Association technique maritime*, n° 7, session de 1896, p. 43.

Quelques propriétés des surfaces moulures;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI,

à Parme

I.

Lorsqu'on doit considérer une ligne quelconque L, on désignera par

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \quad (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu), \quad (\cos l, \cos m, \cos n), \quad \rho, \quad r, \quad s$$

les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale, le rayon de courbure, celui de torsion et l'arc.

Les surfaces que l'illustre Monge a nommées *moulures* sont engendrées par une ligne plane Λ (*profil*) dont le plan roule, sans glisser, sur une surface développable quelconque Σ (*développable directrice*). Voici une autre génération remarquable de ces surfaces.

Que l'on prenne sur chaque plan rectifiant d'une ligne arbitraire L un point $M(\xi, \eta, \zeta)$ et soient

Λ le lieu de M,
$A(x, y, z)$ un point quelconque de L,
t la distance AM,
θ l'inclinaison de AM sur la tangente de L.

On a évidemment

$$\xi = x + t(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos l), \qquad \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{ds} = (1 + t'\cos\theta - t\sin\theta\,\theta')\cos\alpha + t\left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\lambda$$
$$+ (t'\sin\theta + t\cos\theta\,\theta')\cos l, \quad \ldots,$$

σ étant l'arc de A. A l'aide de ces formules on trouve que les conditions

$$\sum \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}\cos\alpha = 0, \qquad \sum \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\cos l = 0,$$

exprimant que A est une trajectoire orthogonale des plans rectifiants de L, deviennent

$$(t\cos\theta)' + 1 = 0, \qquad (t\sin\theta)' = 0,$$

d'où, par intégration,

$$(1) \qquad t\cos\theta = a - s, \qquad t\sin\theta = b,$$

a et b étant des constantes.

Si l'on porte les plans rectifiants de L et les points M qu'ils contiennent sur le plan rectifiant initial (le plan rectifiant en A), les points M vont se ranger, sur ce plan, suivant une ligne L_0 dont l'équation en coordonnées polaires t, θ est

$$t\sin\theta = b.$$

Cette ligne L_0 est donc une droite parallèle à la tangente de L en A. Et puisque, en désignant par ds_0 la distance de deux points consécutifs de L_0, on a, en vertu des égalités (1),

$$\left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + t^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1,$$

on déduit

$$ds_0 = ds.$$

Ce résultat nous donne la génération suivante :

Soient C une ligne quelconque tracée sur un plan P, R une droite de P et A un point de R. Que l'on déplace le plan P de façon qu'il soit toujours le plan rectifiant d'une ligne arbitraire L, tandis que le point A glisse sur la ligne L et la droite R demeure tangente à cette courbe.

Si, pendant le mouvement du plan P, on fait glisser la courbe C sur ce plan, parallèlement à la droite R, avec une vitesse égale à celle du point A, la courbe C engendre une surface moulure dont elle est le profil.

Si le plan P est assujetti à la condition de rester, pendant le mouvement, le plan normal ou bien le plan osculateur d'une ligne L, on a, dans le premier cas, la génération que j'ai étudiée dans une autre occasion ([1]), et, dans le deuxième cas, on trouve que le problème est réduit à l'intégration des équations suivantes :

$$(t\cos\theta)' - \frac{1}{\rho}(t\sin\theta) + 1 = 0, \qquad (t\sin\theta)' + \frac{1}{\rho}(t\cos\theta) = 0.$$

Sur une surface moulure on ne peut avoir qu'une seule trajectoire orthogonale des profils qui soit à courbure constante, ou bien à torsion constante.

1° Si, en effet, T et T_1 sont deux trajectoires à courbure constante, les lignes t, t_1, lieux des centres de courbure de T et T_1, sont aussi à courbure constante et, conséquemment, elles coïncident avec l'arête de rebroussement de la développable directrice Σ ; ce qui ne peut pas arriver.

2° Supposons que les trajectoires T, T_1 soient à torsion constante $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$.

On a évidemment

$$\frac{ds}{m} = \frac{ds_1}{n}, \qquad \frac{ds}{\rho} = \frac{ds_1}{\rho_1}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_1 = \frac{n}{m}\rho, \qquad ds_1 = \frac{n}{m}ds.$$

([1]) Voir *Sulle superficie modanate* (*Journal de M. Battaglini*, 1892).

Et puisque, en désignant par ρ_0 le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de Σ, on a

$$\rho_0 = \rho + r\frac{d}{ds}\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = \rho_1 + r_1\frac{d}{ds_1}\left(r_1\frac{d\rho_1}{ds_1}\right),$$

il suit

$$\rho + m^2\rho'' = \frac{n}{m}(\rho + m^2\rho'').$$

On a donc $m = n$, et conséquemment

$$r_1 = r = m, \qquad \rho_1 = \rho, \qquad ds_1 = ds,$$

ce qui démontre l'identité des lignes T, T_1.

Des considérations géométriques assez simples démontrent que ce résultat est absurde.

Les propriétés qu'on vient d'énoncer sont donc démontrées.

II.

Soient ξ, ζ les coordonnées d'un point quelconque du profil par rapport à un système d'axes coordonnés $\Omega(\xi, \zeta)$. Dans le roulement du plan de Λ sur la surface développable Σ, l'axe $\Omega\xi$ enveloppe, sur cette surface, une ligne géodésique L. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de L, et par X, Y, Z celles d'un point de la surface engendrée S, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} X = x - (\xi + s_1)\cos\alpha + \zeta\cos l, \\ Y = y - (\xi + s_1)\cos\beta + \zeta\cos m, \\ Z = z - (\xi + s_1)\cos\gamma + \zeta\cos n. \end{cases}$$

Si donc la surface moulure S doit passer par la ligne

$$x_1 = x_1(t), \qquad y_1 = y_1(t), \qquad z_1 = z_1(t)$$

(t paramètre quelconque), on doit avoir

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = -\Sigma(x_1 - x)\cos\alpha - s, \qquad \eta = \Sigma(x_1 - x)\cos l, \\ \Sigma(x_1 - x)\cos\lambda = 0. \end{cases}$$

Et puisque, à l'aide de la troisième équation (3), on peut éliminer un des paramètres t, s, il suit que :

Si l'on donne une surface développable quelconque Σ et une ligne à double courbure L_1, on peut, en général, conduire par cette ligne une seule surface moulure ayant Σ pour développable directrice, ou bien un nombre fini de ces surfaces.

Lorsque la développable Σ se réduit à un cylindre, on peut prendre une de ses sections droites pour ligne géodésique L. Si donc les génératrices du cylindre sont parallèles à l'axe des z, il suffit de faire dans les formules précédentes

$$\cos l = 0, \qquad \cos m = 0, \qquad \cos n = 1; \qquad \cos\gamma = 0;$$
$$\cos\lambda = -\cos\beta, \qquad \cos\mu = \cos\alpha, \qquad \cos\nu = 0; \qquad z = 0.$$

Exemples :

1° *Faire passer une surface moulure par une droite, la développable directrice étant quelconque.*

En supposant la droite parallèle au plan $x = 0$ et inclinée de l'angle θ sur l'axe des z, on a

$$x_1 = a, \qquad y_1 = t\sin\theta, \qquad z_1 = t\cos\theta,$$

et la troisième équation (3) donne

$$t = \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}.$$

Pour définir le profil Λ, on a donc les équations

$$\begin{aligned}\xi = {} & (x-a)\cos\alpha + \left(y - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\sin\theta\right)\cos\beta \\ & + \left(z - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\cos\theta\right)\cos\gamma - s, \\ \eta = {} & -(x-a)\cos l - \left(y - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\sin\theta\right)\cos m \\ & - \left(z - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\cos\theta\right)\cos n.\end{aligned}$$

La courbe Λ déterminée, le problème est à considérer comme résolu.

2° *Faire passer une surface moulure, dont la développable directrice Σ est à cône directeur de révolution, par une ligne quelconque placée sur un plan parallèle à l'axe du cône.*

L'arête de rebroussement de Σ est une hélice que nous supposons tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z; supposons la ligne L_1 dans le plan coordonné $y=0$ et soit

$$z_1 = f(x_1)$$

son équation. Puisque $y_1 = 0$, $\cos\nu = 0$, la troisième équation (3) donne

$$x_1 = \frac{x\cos\lambda + y\cos\mu}{\cos\lambda},$$

et les équations qui définissent le profil Λ deviennent

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{\cos\mu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\beta}{\cos\lambda}\,y + \left[z - f\left(\frac{x\cos\lambda + y\cos\mu}{\cos\lambda}\right)\right]\cos\gamma - s, \\ \eta &= \frac{\cos\mu\cos l - \cos\lambda\cos m}{\cos\lambda}\,y - \left[z - f\left(\frac{x\cos\lambda + y\cos\mu}{\cos\lambda}\right)\right]\cos n.\end{aligned}$$

Cela suffit à la solution du problème.

Le problème de construire une surface moulure passant par une

ligne connue L_1 lorsqu'on donne les normales de la surface le long de cette ligne, est indéterminé, si on laisse tout à fait arbitraire la développable directrice Σ. L'indétermination peut disparaître, en posant des conditions pour cette développable.

Supposons que la développable Σ soit, par exemple, un cylindre (non donné *a priori*) et que les normales à la surface le long de la ligne $L_1(x_1, y_1, z_1)$ soient définies par leurs cosinus directeurs $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

Sur ces droites prenons, à partir de L_1, des distances H et soit $L_0(x_0, y_0, z_0)$ le lieu des extrémités. On a

$$x_0 = x_1 + H\cos A, \qquad y_0 = y_1 + H\cos B, \qquad z_0 = z_1 + H\cos C,$$

et, puisque les cosinus directeurs des normales au cylindre Σ, projetant L_0 sur le plan $z = 0$, sont proportionnels aux quantités

$$\cos\beta_1 + H'\cos B + H(\cos B)', \quad -[\cos\alpha_1 + H'\cos A + H(\cos A)'], \quad 0,$$

la condition pour que le cylindre Σ soit tangent à la surface lieu des normales données est exprimée par l'équation

$$\begin{aligned}[\cos\beta_1 + H'\cos B + H(\cos B)']\cos A \\ - [\cos\alpha_1 + H'\cos A + H(\cos A)']\cos B = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$H = \frac{\cos\alpha_1\cos B - \cos\beta_1\cos A}{\cos A\cos(B)' - \cos B(\cos A)'}.$$

La distance H connue, on peut construire la ligne L_0 et conséquemment le cylindre Σ; après cela, rien ne s'oppose à la solution complète du problème.

Supposons que la ligne L_1 *soit une géodésique de la surface.* — Dans ce cas, les normales de la surface le long de L_1 coïncident avec les normales principales de L_1. On a donc

$$\cos A = \cos\lambda_1, \qquad \cos B = \cos\mu_1, \qquad \cos C = \cos\nu_1,$$

et

$$H = \frac{\cos n_1}{\frac{1}{\rho_1}\cos n_1 - \frac{1}{r_1}\cos\gamma_1}.$$

Supposons que la ligne L_1 *soit une asymptotique de la surface.* — Les normales de la surface le long de L_1 doivent coïncider avec les binormales de L_1. On a donc

$$\cos A = \cos l_1, \qquad \cos B = \cos m_1, \qquad \cos C = \cos n_1$$

et

$$H = -\frac{r_1 \cos \nu_1}{\cos\gamma_1}.$$

III.

Si l'on désigne par $d\Delta$ la distance entre deux points infiniment rapprochés d'une surface moulure, on déduit des équations (2)

$$d\Delta^2 = \left(\frac{\zeta}{r} - \frac{\xi + s}{\rho}\right)^2 ds^2 + d\sigma^2.$$

La courbure géodésique des trajectoires orthogonales des profils ($\sigma =$ const.) est donc donnée par la formule

$$(4) \qquad \frac{\frac{\xi'}{\rho} - \frac{\zeta'}{r}}{\frac{\xi + s}{\rho} - \frac{\zeta}{r}}.$$

A partir d'un point quelconque A de la surface, menons la perpendiculaire AB sur l'axe instantané de rotation MN et la normale AC de la surface. Puisque la droite MN coupe la ligne L sous un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{r}{\rho}$, car elle est la droite rectifiante

de L, on a pour rayon de courbure ρ_σ de la trajectoire

$$\rho_\sigma = \mathrm{AB} = \frac{\frac{\xi + s}{\rho} - \frac{\zeta}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}}.$$

Cette formule et l'autre (4) donnent

$$\cos\varepsilon = \cos \mathrm{A\hat{C}B} = \frac{\frac{\xi'}{\rho} - \frac{\zeta'}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}}.$$

Si donc R_σ et R_s sont les rayons de courbure principaux de la surface moulure, on trouve

$$\mathrm{R}_\sigma = \frac{\rho_\sigma}{\sin\varepsilon} = \frac{\frac{\xi + s}{\rho} - \frac{\zeta}{r}}{\frac{\zeta'}{\rho} + \frac{\xi'}{r}}, \qquad \mathrm{R}_s = \frac{\sqrt{1 - \xi'^2}}{\xi''} = \frac{\zeta'}{\xi''}.$$

Lorsque la développable directrice est un cylindre, on a $\frac{1}{r} = 0$ et conséquemment

$$(5) \qquad \mathrm{R}_\sigma = \frac{\xi + s}{\zeta'}, \qquad \mathrm{R}_s = \frac{\zeta'}{\xi''}.$$

Il suit que la courbure K de la surface est donnée de la manière suivante

$$\mathrm{K} = \frac{\xi''}{\xi + s}.$$

Si, par exemple, la courbure de la surface est proportionnelle à la courbure $\frac{1}{\xi + s}$ des trajectoires orthogonales des profils, on doit avoir $\xi'' = a$, d'où il suit

$$\rho_p = \sqrt{\frac{1 - b^2}{a^2} - \frac{2b}{a}\sigma - \sigma^2}.$$

On voit d'ici que : *Le profil est une cycloïde dont la base est parallèle aux génératrices du cylindre directeur.*

Si l'on remarque que la courbure géodésique K_t des trajectoires orthogonales des profils est, à cause de l'égalité (4),

$$K_t = \frac{\xi'}{\xi + s},$$

on a

$$\frac{K}{K_t} = \frac{\xi''}{\xi'}.$$

Le rapport $\frac{K}{K_t}$ ne dépend donc nullement de la nature du cylindre directeur. Si donc on rappelle que sur la pseudo-sphère la courbure totale et la courbure géodésique des parallèles sont des constantes, on déduit :

Dans la surface moulure à développable directrice cylindrique dont le profil est une tractrice ayant l'asymptote parallèle aux génératrices du cylindre, le rapport de la courbure de la surface à la courbure géodésique des trajectoires orthogonales des profils est une constante.

Le théorème subsiste aussi lorsque la surface moulure se réduit à une surface de révolution.

Soit L une ligne quelconque tracée sur une surface moulure à développable directrice cylindrique, dont le profil n'est pas circulaire.

Tout le long de cette ligne L il subsiste une certaine relation entre les quantités s, σ, R_s, R_σ et les dérivées de R_s, R_σ par rapport à s et σ. Mais puisque, en vertu des équations (5), on a

$$R_s = f(\sigma), \qquad R_\sigma = \varphi(\sigma) + s\psi(\sigma),$$

$f(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$ et $\psi(\sigma)$ étant des fonctions de σ, on trouve que les dérivées de R_s et R_σ différentes de zéro et les arcs s, σ sont exprimables par des fonctions en termes finis des rayons R_s, R_σ.

Cela conduit au théorème remarquable suivant :

Quelle que soit la ligne qu'on trace sur une surface moulure à développable directrice cylindrique et à profil non circulaire, les

rayons de courbure principaux de la surface vérifient, tout le long de cette ligne, une même relation finie.

Remarque. — Lorsque le profil est circulaire, toute relation en termes finis entre R_s et R_σ revient à la relation unique $R_\sigma =$ const.

IV.

Il n'y a aucune surface moulure dans laquelle les rayons de courbure principaux soient liés par une même relation finie, dans toute l'étendue de la surface. Une telle relation ne peut donc être vérifiée que dans une suite de points constituant une ligne.

Supposons que le profil de la surface moulure soit la ligne

$$(6) \qquad \xi = f(\zeta)$$

et que la section droite du cylindre directeur soit représentée par les équations

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s)$$

ou bien par l'équation

$$(7) \qquad R = R(s),$$

en coordonnées R, s.

Puisque des équations (5) on déduit

$$s = f\left(\frac{\xi'}{\xi''}\right)\zeta' - \xi,$$

on voit que la ligne L de la surface, le long de laquelle les rayons de courbure sont liés par la relation

$$(8) \qquad R_\sigma = f(R_s).$$

est définie par les équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} X &= \varphi\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] - \zeta f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)\varphi'\left[\zeta f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right], \\ Y &= \psi\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] - \zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)\psi'\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right], \\ Z &= \zeta. \end{aligned}\right.$$

Que l'on fasse tourner cette ligne autour de l'axe des z, et l'on engendre une surface de révolution S ayant pour ligne méridienne la courbe

(9) $$x_0 = \sqrt{R^2\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] + \zeta'^2 f^2\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)}, \qquad z_0 = \zeta.$$

En remarquant que

$$\frac{\zeta'}{\xi''} = \frac{[1 + \lambda'^2(\zeta)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(\zeta)}, \qquad \zeta' = \frac{d\zeta}{d\sigma} = \frac{d\zeta}{\sqrt{d\xi^2 + d\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda'^2(\zeta)}},$$

on obtient

(10) $$\left\{\begin{aligned} x_0 = \Bigg(R^2 &\left\{\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda'^2(z_0)}} f\left[\frac{1 + \lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right] - \lambda(z_0)\right\} \\ &+ \frac{1}{1 + \lambda'^2(z_0)} f^2\left[\frac{1 + \lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right]\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Après avoir posé

(11) $$x_0 = \psi(z_0),$$

l'équation (10) donne

(12) $$\left\{\begin{aligned} \psi^2(z_0) = R^2 &\left\{\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda'^2(z_0)}} f\left[\frac{1 + \lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right] - \lambda(z_0)\right\} \\ &+ \frac{1}{1 + \lambda'^2(z_0)} f^2\left[\frac{1 + \lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right]. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$R_s = \frac{[1+\lambda'^2(\zeta)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(\zeta)} = \frac{[1+\lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}$$

et, conséquemment,

(13) $$R_\sigma = f\left\{\frac{[1+\lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right\}.$$

On peut donc énoncer le théorème :

Si le profil de la surface moulure et la section droite du cylindre directeur sont représentés par les équations (6), (7) :

1° *La ligne* L *le long de laquelle les rayons de courbure principaux vérifient la relation* (8) *s'obtient en coupant la surface donnée par la surface de révolution* S *dont la ligne méridienne est la courbe* (10).

2° *La surface de révolution* S *dont la ligne méridienne est la courbe* (11) *coupe la surface suivant une ligne* L, *le long de laquelle les rayons* R_s, R_σ *vérifient la relation finie qu'on obtient en éliminant* z_0 *entre les équations* (12), (13).

Exemples :

1° En supposant que le profil de la surface moulure soit un cercle de rayon m, que le long de la ligne L soit vérifiée la relation $R_\sigma = k$ et que la section droite du cylindre directeur soit une spirale logarithmique ($R = as$) ou bien un cercle ($R = a$), on trouve que la courbe L s'obtient en coupant la surface par les ellipsoïdes ayant pour lignes méridiennes respectivement les ellipses

$$\frac{x_0^2}{a^2(k-m)^2+k^2} + \frac{z_0^2}{m^2} = 1, \qquad \frac{x_0^2}{a^2-k^2} + \frac{z_0^2}{\frac{m^2}{k^2}(a^2+k^2)} = 1;$$

2° Supposons que le profil de la surface moulure soit une parabole

$$\left[\xi = \lambda(\zeta) = \frac{\zeta^2}{a}\right],$$

que la section droite du cylindre directeur soit une spirale logarithmique ($R = s \cos i$), et que la surface de révolution S coupant la surface moulure soit une sphère $\left[x_0 = \psi(z_0) = \sqrt{m^2 - z_0^2}\right]$.

L'équation (13), résolue par rapport à (z_0), donne

$$z_0 = \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1},$$

et conséquemment, le long de la ligne d'intersection L, les rayons de courbure principaux vérifient la relation

$$m^2 - \frac{a^2}{4}\left[\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right] = \frac{\left[R_\sigma - \frac{R_s}{2} + \frac{a}{4}\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \cos^2 i - R_\sigma^2}{\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

L'équation (12), résolue par rapport à R, donne

$$(14) \qquad R = \sqrt{\psi^2(z_0) - \frac{1}{1 + \lambda'^2(z_0)} f^2\left[\frac{[1 + \lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right]},$$

et, dans ce cas, on a

$$s = f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)\zeta' - \xi,$$

c'est-à-dire

$$(15) \qquad s = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda'^2(z_0)}} f\left\{\frac{[1 + \lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right\} - \lambda(z_0).$$

D'ailleurs l'équation (11), en vertu des égalités (9), peut s'écrire

$$(16) \qquad \sqrt{R^2\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] + \zeta'^2 f^2\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)} = \psi(\zeta).$$

On a donc le théorème :

Si en coupant une surface moulure par la surface de révolution S *dont la ligne méridienne est la courbe* (11), *on obtient une ligne* L

le long de laquelle les rayons de courbure R_s, R_σ *vérifient la relation* (8) :

1° *Lorsque le profil de la surface est la courbe* (6), *la section droite du cylindre directeur est représentée (en coordonnées* R, s) *par l'équation qu'on obtient en éliminant* z_0 *entre les équations* (14), (15).

2° *Lorsque la section droite du cylindre directeur est la courbe* (7), *le profil de la surface moulure est représenté par l'équation différentielle* (16).

Exemples :

1° Supposons que le profil de la surface moulure soit circulaire

$$\left[\xi = \lambda(\zeta) = \sqrt{m^2 - \zeta^2}\right],$$

que la surface de révolution S coupant la surface moulure soit du deuxième ordre $\left[r = \psi(z_0) = \sqrt{\alpha z_0^2 + \beta}\right]$, et que tout le long de la ligne d'intersection L soit vérifiée la relation $R_\sigma = k$.

On trouve que la section droite du cylindre directeur est la courbe représentée par l'équation

$$R = \sqrt{\alpha m^2 + \beta - \frac{\alpha m^2 + k^2}{(k-m)^2} s^2}.$$

La surface du deuxième ordre se réduit à un cylindre ou bien à un cône lorsqu'on a respectivement

$$\alpha = 0, \qquad \beta = a^2; \qquad \alpha = b^2, \qquad \beta = 0.$$

a et b étant des constantes. Dans ces cas, on a

$$R = \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{(k-m)^2} s^2}, \qquad R = \sqrt{b^2 m^2 - \frac{b^2 m^2 + k^2}{(k-m)^2} s^2},$$

et conséquemment le cylindre directeur a pour section droite une épicycloïde ([1]).

2° Supposons que le cylindre directeur soit circulaire ($R = a$), que la surface de révolution s soit une hyperboloïde à une nappe

$$\left[x_0 = \psi(z_0) = \sqrt{\alpha^2 z_0^2 + \beta^2}\right]$$

et que tout le long de la ligne d'intersection L soit vérifiée la relation $R_\sigma = k$.

On trouve que le profil de la surface moulure est la courbe définie par l'équation

$$\zeta = \frac{1}{2c\alpha}\left[c^2 e^{\frac{\alpha}{k}\sigma} + (a^2 - \beta^2) e^{-\frac{\alpha}{k}\sigma}\right],$$

c étant une constante arbitraire.

Pour $\beta^2 = a^2$, on obtient

$$\zeta = \frac{c}{2\alpha} e^{\frac{\alpha}{k}\sigma},$$

équation qui représente une tractrice dont l'asymptote est perpendiculaire aux génératrices du cylindre directeur.

V.

Je vais démontrer une propriété remarquable des surfaces moulures à développable directrice cylindrique.

Soit L une ligne à double courbure, représentée par les équations

$$(17) \qquad x = R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = U$$

(R et U étant des fonctions de u); Λ la projection de L sur le plan $z = 0$ et M la ligne méridienne de la surface de révolution engendrée par la courbe L tournant autour de l'axe des z.

([1]) Voir *Sur les lignes sphériques*, § 6 (*Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*; 1889).

Soient i et ω les inclinaisons de L sur la méridienne M et sur l'axe de la surface de révolution, θ l'inclinaison de Λ sur les rayons vecteurs R issus de l'origine et σ l'arc de Λ.

On a

$$\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2 + R^2\left(\frac{du}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

et puisque

$$\frac{dR}{d\sigma} = \cos\theta; \qquad \frac{du}{d\sigma} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = \frac{du}{ds}\frac{1}{\sin\omega},$$

il résulte

$$(18) \qquad R\frac{du}{ds} = \sin\theta\sin\omega.$$

Or, les équations (17) donnent

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{R^2 + R'^2 + U'^2};$$

on a donc

$$\sin i = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R'^2 + U'^2}} = R\frac{du}{ds}.$$

Cette équation et (18) donnent

$$(19) \qquad \sin i = \sin\theta\sin\omega.$$

En remarquant qu'une surface moulure, dont la développable directrice est un cylindre, peut être considérée comme l'ensemble d'une infinité de bandes infiniment petites de surfaces de révolution ayant pour ligne méridienne le profil et pour axes les génératrices du cylindre, l'équation (19) donne lieu au théorème suivant :

Si sur une surface moulure, dont la développable directrice est un cylindre K, *on trace une ligne quelconque* L, *entre les angles i et ω que* L *forme avec le profil et les génératrices du cylindre* K, *et l'angle θ que la projection Λ de* L *sur le plan d'une section droite du cylindre forme avec les tangentes de cette section, a lieu la relation* (19).

Ce théorème pourrait être le point de départ pour une construction géométrique simple d'une loxodromie de la surface moulure. En remarquant que les conditions $\omega =$ const., $i =$ const. entraînent l'autre $\theta =$ const., on a

Il y a seulement un cas dans lequel la ligne d'intersection d'une surface de révolution avec un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à l'axe, est une hélice du cylindre et une loxodromie de la surface ; c'est le cas de l'hélice cylindro-conique ordinaire.

Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues;

PAR M. N. SALTYKOW.

---

1. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des fonctions de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}$.

Le système d'équations différentielles que je veux étudier ici est de la forme

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu} = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

X_k^h, $X^{h\nu}$ étant des fonctions de toutes les variables x et z. L'indice p est un nombre entier quelconque. Si $p = 0$ nous y comprendrons le cas où toutes les fonctions X_k^h s'annulent, le système (1) étant

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} - X^{h\nu} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est aisé d'intégrer ce dernier système si les fonctions $X^{h\nu}$ satisfont à certaines conditions. Mais nous ne nous y arrêterons pas, car ce système sera compris dans nos recherches sur les équations (1).

Un second cas particulier du système (1), correspondant à la valeur

$m = 1$, a été intégré par Jacobi ([1]). Mais l'illustre géomètre n'a pas examiné le caractère des intégrales qu'il avait obtenues.

Enfin, si $n = 1$, les équations (1) présentent un système bien connu des équations linéaires aux dérivées partielles d'une seule fonction inconnue.

2. Supposons que le système de n équations distinctes par rapport aux variables z

$$(2) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

soit une solution des équations (1). Les équations (2), dérivées par rapport aux variables x, donneront

$$(3) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} = 0,$$

l'indice h prenant toutes les valeurs de 1 à m, k les valeurs de $m+1$ à $m+p$.

Multiplions l'égalité (4) par X_k^h et sommons le résultat par rapport à l'indice k. En y ajoutant l'égalité (3), il viendra

$$(5) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0.$$

Comme en vertu des équations (2) on a identiquement

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} = X^{h\nu},$$

([1]) *G. W.*, B. IV, S. 7-9. Depuis, M. Hamburger est revenu deux fois aux mêmes équations (*Journ. Crelle*, B. 100, S. 404; B. 110, S. 171).

les égalités (5) deviennent

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \dfrac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Ainsi, pour que les valeurs des fonctions z tirées de (2) satisfassent aux équations (1), il est nécessaire que les équations (6) soient des conséquences de (2).

5. Prenons donc le système de m équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction f par rapport aux variables x et z

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Supposons que ce système ait n intégrales distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Nous allons montrer que les équations

$$(8) \qquad f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

fournissent une solution des équations (1).

En effet, on a

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0.$$

Les fonctions f_i étant des intégrales des équations (7), on aura de même

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} = 0.$$

Il viendra donc

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu}\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant fonctionnel des fonctions f_i par rapport aux variables z ne s'annulant pas, il s'ensuit que pour les valeurs des fonctions z tirées des équations (8), on a les identités

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, m).$$

4. Supposons que les fonctions X_k^h, $X^{h\nu}$ sont telles que les m équations (7) forment un système jacobien. Soit $f_1, f_2, \ldots, f_{p+n}$ un système d'intégrales distinctes des équations (7), $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ étant des fonctions arbitraires distinctes de ces intégrales. D'après le théorème démontré au numéro précédent, les équations

$$\pi_i(f_1, f_2, \ldots, f_{p+n}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

fournissent une solution des équations (1).

Il est aisé de démontrer que les équations (9) *présentent la solution la plus générale des équations* (1). *C'est-à-dire que chaque solution*

(10) $$z_\nu = \psi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

des équations (1) *est contenue dans les formules* (9), *à condition que, pour toutes les valeurs de variables x et z satisfaisant aux relations* (10), *les fonctions X_k^h, $X^{h\nu}$ sont holomorphes.*

En effet, pour chaque valeur de l'indice h, nous avons le système des identités suivantes :

$$\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_k} - X^{h\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n} X^{h\nu} \frac{\partial f_s}{dz_\nu} \qquad (s = 1, 2, \ldots, p + n),$$

où les fonctions z sont remplacées par leurs valeurs (10). En éliminant les n valeurs $X^{h\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, il viendra

$$(11) \qquad \mathrm{D}x_h f_s + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \mathrm{D}x_k f_s = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, p+n,$$

où l'on a

$$\mathrm{D}x_h f_s = \frac{\partial f_s}{\partial x_{sn}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial z_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_{sn}}.$$

Cela posé, éliminons les p valeurs X_k^h, $k = m+1, \ldots, m+p$, entre les équations (11). Leur nombre étant $p+n$, nous obtiendrons n identités nouvelles indépendantes de X_k^h. On voit aisément qu'elles sont de la forme suivante :

$$\Delta_{h\sigma} = 0, \qquad \sigma = p+1, p+2, \ldots, p+n,$$

les $\Delta_{h\sigma}$ étant des déterminants fonctionnels de $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_\sigma$ par rapport à $x_h, x_{m+1}, \ldots, x_{m+p}$, en y considérant $z_1, z_2, \ldots z_n$ comme des fonctions (10) de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}$:

$$\Delta_{h\sigma} = \begin{vmatrix} \mathrm{D}x_h f_1 & \mathrm{D}x_{m+1} f_1 & \ldots & \mathrm{D}x_{m-p} f_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{D}x_h f_p & \mathrm{D}x_{m+1} f_p & \ldots & \mathrm{D}x_{m-p} f_p \\ \mathrm{D}x_h f_\sigma & \mathrm{D}x_{m+1} f_\sigma & \ldots & \mathrm{D}x_{m-p} f_\sigma \end{vmatrix}.$$

Les identités

$$\Delta_{h\sigma} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

montrent que ces valeurs des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_\sigma$ sont liées par une relation. L'indice σ prenant n valeurs, on en conclut que toutes les intégrales (10) sont telles que, si on les substitue dans $f_1, f_2, \ldots, f_{p+n}$, les fonctions ainsi obtenues sont liées par n relations. Toutes ces intégrales sont donc fournies par les relations (10).

La démonstration que je viens d'exposer ici revient à celle qui m'a été indiquée par M. Liapounow dans le cas d'une seule équation linéaire aux dérivées partielles d'une seule fonction inconnue. Il est

évident que les considérations citées ne sont permises que si, pour toutes les valeurs de variables x et z satisfaisant aux relations (10), les coefficients X_k^h, $X^{h\nu}$ sont holomorphes. En effet, si ce n'était pas le cas, il pourrait arriver que les fonctions f_i, ainsi que leurs dérivées partielles par rapport aux variables x et z, ne soient plus holomorphes pour les mêmes valeurs des variables. C'est alors que nous serions en état de dire *a priori* qu'un ou plusieurs déterminants $\Delta_{h\sigma}$ pourraient devenir infinis ou indéterminés. De pareilles intégrales (10) ne seront donc pas contenues dans les formules (9).

Soit, par exemple,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 1 + \sqrt{z_1 - x}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = (z_2 - xy)\sqrt{z_1 - x},$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = x + (z_2 - xy)(x - 2\sqrt{z_1 - x})$$

un système de la forme (1). D'après la théorie exposée, la solution générale de ces équations est

$$z_1 = x + [\tfrac{1}{2}x - C_1 \operatorname{tang}(C_1 y + C_2)]^2,$$
$$z_2 = xy - 2C_1^2 \operatorname{séc}^2(C_1 y + C_2),$$

C_1, C_2 étant des constantes arbitraires. Évidemment, elle ne contient pas la solution

$$z_1 = x, \qquad z_2 = xy,$$

les coefficients des équations proposées n'étant plus holomorphes au voisinage de toutes les valeurs des variables x et z qui satisfont à ces dernières relations.

Les équations (1), dont la théorie vient d'être développée dans cet article, sont susceptibles de beaucoup d'applications dans l'Analyse mathématique. Nous en donnerons bientôt quelques exemples.



Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles;

PAR M. N. SALTYKOW.

---

1. M. S. Lie, l'auteur de la théorie des transformations infinitésimales des équations différentielles, étudie les avantages (¹) qui se présentent pour l'intégration des équations différentielles, si les transformations infinitésimales qu'elles admettent sont connues. Dans ma Note je m'occupe du calcul de ces transformations infinitésimales.

2. Il est évident qu'une équation différentielle

$$(1) \qquad dy - X\,dx = 0$$

admet une transformation infinitésimale ξ, ξX (²), où ξ est une fonction arbitraire de x, y. C'est-à-dire ξ, η étant une transformation infinitésimale que l'équation (1) admet, elle admettra de même la transformation

$$0, \qquad z = \xi X - \eta.$$

(¹) *Math. An.*, Bd, XI, S. 489.

(²) JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 21.

Il s'ensuit, pour avoir une transformation infinitésimale que notre équation admet, qu'il suffit de calculer la valeur d'une seule fonction z, dont la recherche revient à intégrer une équation différentielle aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + X \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} z.$$

Mais cette égalité montre que $\frac{1}{z}$ est un facteur intégrant de l'équation (1). Ainsi le calcul d'une transformation infinitésimale que l'équation (1) admet et la recherche de son facteur intégrant sont deux problèmes entièrement équivalents.

3. Soit

$$(2) \qquad dx_k - \sum_{h=1}^{m} X_k^h \, dx_h = 0 \qquad (k = m+1, \ldots, m+n).$$

un système d'équations aux différentielles totales, X_k^h étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$. Leurs intégrales satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$(3) \qquad X_\varphi^h = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

formant un système jacobien. Ce système étant jacobien les conditions suivantes doivent avoir lieu

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X_\nu^h}{\partial x_i} - \dfrac{\partial X_\nu^i}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{p=m+1}^{m+n} \left(X_\nu^i \frac{\partial X_\nu^h}{\partial x_p} - X_p^h \frac{\partial X_\nu^i}{\partial x_p} \right) = 0 \\ \qquad (\nu = m+1, \ldots, m+n); \end{array} \right.$$

h, i prenant toutes les valeurs distinctes de 1 à m.

Soient $z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+n}$ des fonctions de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$, l'expression

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+n} z_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

étant une transformation infinitésimale ([1]) que les équations (2) admettent. Les fonctions z satisfont aux conditions ([2])

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k^h \dfrac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - Z_\nu^h = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = m+1, \ldots, m+n), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$X_\nu^h = \sum_{l=m+1}^{m-n} z_l \frac{\partial X_\nu^h}{\partial x_l}.$$

Ainsi, pour calculer les n fonctions z, nous avons un système de mn équations (5) aux dérivées partielles qu'il est aisé d'intégrer. En effet, comme je l'ai montré dans ma Note : *Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* ([3]), l'intégration de ce système revient à intégrer un système

$$(6)\qquad \mathfrak{F}^h f = (X^h + Z^h) f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

aux dérivées partielles, où nous représentons symboliquement par Z^h l'opération

$$Z^h = \sum_{\nu=m+1}^{m+n} Z_\nu^h \frac{\partial}{\partial z_\nu}.$$

4. Il est aisé de voir que le système (6), étant jacobien, admet $2n$ intégrales distinctes. En effet,

$$(\mathfrak{F}^h f, \mathfrak{F}^i f) = (X^h f, X^i f) + (X^h f, Z^i f) + (Z^h f, X^i f) + (Z^h f, Z^i f).$$

([1]) Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 80.

([2]) Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 84.

([3]) *Journal de Liouville*; 1897.

Mais on a

$$(X^h f, X^i f) = 0,$$

$$(X^h f, Z^i f) + (Z^h f, X^i f) + (Z^h f, Z^i f) = \sum_{v=m+1}^{m+n} \sum_{l=m+1}^{m+n} L_{vl} z_l \frac{\partial f}{\partial z_v},$$

où l'on a posé

$$L_{vl} = \frac{\partial^2 X_v^h}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 X_v^i}{\partial x_h \partial x_l} + \sum_{p=m+1}^{m+n} \left(X_p^i \frac{\partial^2 X_v^h}{\partial x_p \partial x_l} - X_p^h \frac{\partial^2 X_v^i}{\partial x_p \partial x_l} + \frac{\partial X_p^i}{\partial x_l} \frac{\partial X_v^h}{\partial x_p} - \frac{\partial X_p^h}{\partial x_l} \frac{\partial X_v^i}{\partial x_p} \right).$$

En différentiant les égalités (4) par rapport aux variables x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}$, nous avons

$$L_{vl} = 0, \qquad v = m+1, \ldots, m+n, \qquad l = m+1, \ldots, m+n.$$

Il s'ensuit

$$(\mathfrak{F}^h f, \mathfrak{F}^i f) = 0,$$

le système (6) étant jacobien. Ses intégrales distinctes étant au nombre de $2n$

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n},$$

la solution générale des équations (5) est

$$\pi_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}) = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

π_s étant des fonctions arbitraires distinctes. Mais, comme il est connu, les fonctions φ sont définies par les intégrales du système aux différentielles totales

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx_k - \sum_{h=1}^{m} X_k^h dx_h = 0, \\ dz_k - \sum_{h=1}^{m} Z_k^h dx_h = 0, \end{aligned} \right\} \quad k = m+1, \ldots, m+n,$$

dont les n premières équations présentent les équations (2).

5. On voit aisément que le problème du calcul des transformations infinitésimales que les équations (2) admettent est déjà résolu chaque fois que l'on peut trouver n solutions des équations (7) distinctes par rapport aux variables z. *Mais évidemment de pareils cas ne se présentent que pour des valeurs exceptionnelles des fonctions* X_k^h.

6. Soit, par exemple,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

une équation différentielle, f étant une fonction homogène du degré 1 par rapport à y et à ses dérivées. Remplaçons cette équation par le système simultané

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = y'', \qquad \dots, \qquad \frac{dy^{n-1}}{dx} = f.$$

Les équations (7) prennent dans ce cas la forme

$$(8) \quad \begin{cases} dy - y' dx = 0, & dy' - y'' dx = 0, & \dots, & dy^{n-1} - f dx = 0, \\ dz_2 - z_3 dx = 0, & dz_3 - z_4 dx = 0, & \dots, & dz_{n+1} - Z dx = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$Z = \sum_{l=2}^{n+1} z_l \frac{df}{dy^{l-2}}, \qquad y^0 = y.$$

La fonction f étant homogène, on a

$$\sum_{l=2}^{n+1} y^{l-2} \frac{df}{dy^{l-2}} = f.$$

Il s'ensuit qu'en vertu des n premières équations (8) les n dernières admettent des solutions

$$z_l = y^{l-2}, \qquad l = 2, 3, \dots, n+1.$$

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME III.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME III DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

24290 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Journal de mathématiques
pures et appliquées

